



拡張 Newton-Euler 法による拘束運動繰り返し計算と 順動力学解法への応用

西口 淳平^{*1}, 見浪 護^{*2}, 矢納 陽^{*2}

Iterative calculation method for constraint motion by extended Newton-Euler method and application for forward dynamics

Jumpei NISHIGUCHI^{*1}, Mamoru MINAMI^{*2} and Akira YANOU^{*2}

^{*1,*2} Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University
3-1-1 Tsushimanaka, Kita-ku, Okayama-shi, Okayama 700-8530, Japan

Received 18 December 2013

Abstract

There are two principal methods to derivate motion of equation of robot manipulator, which are Newton-Euler (NE) method and Lagrange method. NE method treats each linkage as rigid linkage and it is possible to calculate internal force and torque not generating real motion of robot manipulator, which is a merit of NE method that Lagrange method does not have. So far, NE method has been applied to a robot of open-loop serial-linkage structure. However, the adaptation has been limited to a motion without contact of hand with environment. Although robot task based on contact with environment, for example assembly task, grinding task, is important, it is not formulated in the way of NE method. So, this paper proposes iterative calculation method for representing constraint dynamical motion of robot manipulator utilizing inverse dynamic calculation method-NE method, leading and enabling the forward dynamics calculation of constraint motions to be dealt recursively through proposed extended NE method for constraint motions, with no use of explicit representation of equation of motions. We applied this method to 2-linkage and 3-linkage manipulators and evaluated its validity by numerical simulations. Also, we calculated inertia force acting on each linkage during constraint motion and evaluated validity of those values.

Key words : Newton-Euler method, Constraint motion, Iterative calculation, Manipulator, Internal force

1. 緒 言

マニピュレータの運動方程式の2つの主要な導出法として Lagrange 法と Newton-Euler 法 (NE 法) がある (Brady, et al., 1982)。NE 法は衛星のような開鎖のツリー構造 (Hooker and Margulies, 1965) や、人体のような生物学的構造 (Stepanenko and Vukobratovic, 1976), (Orin, et al., 1979) に適用されてきたが、計算量が多いため実時間での使用は困難であった。そこで 1980 年に計算量を減らすために再公式化され (Luh, et al., 1980), 1982 年に Walker, Orin によって NE 法を用いた順動力学問題の解法とその有効性が示された (Walker and Orin, 1982)。その後、NE 法は非剛性マニピュレータのモデルへの応用 (Huang and Lee, 1988) 等、様々な所で利用されている。

NE 法はそれぞれのリンクを剛体として扱い、ロボットの実際の運動を生成しない内力、内部トルクの計算が可能であるという Lagrange 法には無いメリットがある。このメリットは、ヒューマノイドロボットの足の衝突・拘束運動時の各リンク間に働く力・トルクの計算等への応用が考えられる。

従来の NE 法は開ループの直鎖リンク構造のロボットに適用されてきたが、ハンド部が外界と接触しない運動に限られていた。ロボットによる組立作業やグラインディング作業など、外界との接触を前提とした作業はロボット

No.13-00861 [DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0208]

^{*1} 岡山大学大学院自然科学研究科 (〒700-8530 岡山県岡山市北区津島中 3-1-1)

^{*2} 正員、岡山大学大学院自然科学研究科

E-mail of corresponding author: minami-m@cc.okayama-u.ac.jp

の作業として重要であるにも拘らず、NE 法として定式化されていない。

ロボットが外部環境との接触拘束する場合のダイナミクスを解く問題は、(長谷川他, 2012) に解説されている。その中で CLP 法 (Anitescu and Potra, 2002) は反復解法により拘束力を算出しておる、反復回数が少ないと残留誤差が発生する問題があること、また ABA 法 (Featherstone and Orin, 2000) は関節拘束が厳密に満たされるものの開リンク構造に限定され拘束運動には適用できないことが示されている。この点に対し本報で提案する拡張 NE 法は拘束条件が厳密に満たされるという点で (中村, 山根, 2000), (Featherstone and Orin, 2000) らの研究と同じであるが、Hemami (Hemami and Wyman, 1979) が行ったように代入法により拘束力を求めること (Minami, et al., 1997) で NE 法の繰り返し計算に拘束力を含めることができるように工夫した。さらに拡張 NE 法の逆動力学計算を順動力学問題に応用する方法も提案する。また外部環境から接触部に作用する力として従来から議論されている抗力だけではなく摩擦力を含む定式化になっている点も従来手法とは異なる特徴である。

2. 拘束運動時の Newton-Euler 法による逆動力学解法

ここでは、変形のない剛体リンクによって構成された直鎖リンク構造のマニピュレータ先端のリンクのみが、変形のない環境と接触しつつ運動する拘束条件付運動の逆動力学解法について考える。図 1 に示すように地面から手先に抗力 f_n と摩擦力 f_t の働く n 本の剛体リンクを持つ直鎖リンク構造のマニピュレータを考え、リンク i に固定された座標系 Σ_i に基づき運動方程式を導出する。 Σ_0 は床に固定された作業座標系である。手先がある拘束面に拘束されているときの拘束条件は手先の位置ベクトルを $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ とし、式 (1) として定義できる。

$$C(\mathbf{r}(\mathbf{q})) = 0 \quad (1)$$

ここで $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ は $n \times 1$ の関節角度ベクトルである。 $C(\mathbf{r}(\mathbf{q}))$ は \mathbf{r} に対し微分可能であることを仮定しておく。図 1 では、ロボットが接触する環境として床を想定して描いているが、以下は、拘束条件として式(1)を前提としており、床拘束に限定された議論ではない。

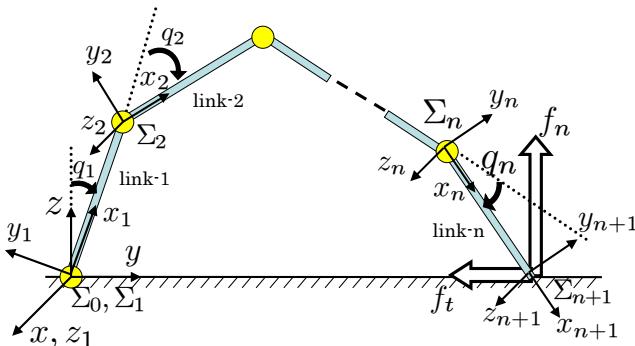


Fig. 1 n-link manipulator whose hand position is constraint by non elastic environment, which is a floor in this figure

まず、Newton-Euler 法の順動力学計算として根元のリンクから先端のリンクに向かってリンク i の角速度 ${}^i\boldsymbol{\omega}_i$ 、角加速度 ${}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ 、原点における並進加速度 ${}^i\ddot{\mathbf{p}}_i$ 、質量中心における並進加速度 ${}^i\ddot{\mathbf{s}}_i$ を以下の式から計算する。左上添字は基準としている座標系を、右下の添字は対象としているリンクを表している。

$${}^i\boldsymbol{\omega}_i = {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} + {}^i\mathbf{z}_i\dot{q}_i \quad (2)$$

$${}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + {}^i\mathbf{z}_i\ddot{q}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\mathbf{z}_i\dot{q}_i) \quad (3)$$

$${}^i\ddot{\mathbf{p}}_i = {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T \left\{ {}^{i-1}\ddot{\mathbf{p}}_{i-1} + {}^{i-1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times {}^{i-1}\hat{\mathbf{p}}_i + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times ({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\hat{\mathbf{p}}_i) \right\} \quad (4)$$

$${}^i\ddot{\mathbf{s}}_i = {}^i\ddot{\mathbf{p}}_i + {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\hat{\mathbf{s}}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\hat{\mathbf{s}}_i) \quad (5)$$

ここで、 ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ は Σ_{i-1} から Σ_i への回転行列、 ${}^i\mathbf{z}_i = [0, 0, 1]^T$ はリンク i の回転軸を表す単位ベクトル、 ${}^{i-1}\hat{\mathbf{p}}_i$ は Σ_{i-1} の原点から Σ_i までの位置ベクトル、 ${}^i\hat{\mathbf{s}}_i$ は Σ_i の原点からリンク i の質量中心までの位置ベクトルを表している。また、初期値は ${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$, ${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}$, ${}^0\ddot{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{g} = [0, 0, g]^T$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{0}$ に設定する。ここで g は重力加速度を表す。

ここで拘束運動について次の 2 つの仮定を行う。(i) 抗力 f_n 、外界接触部の摩擦力 f_t は直交する。(ii) f_t は抗力に比例して決定される: $f_t = Kf_n$ (K は摩擦係数: $0 < K \leq 1$)。抗力 f_n は次章で述べる方法により決定される。次に逆動力学計算に基づいて、先端のリンクから根元のリンクに向かってリンク i における Newton の方程式及び Euler

の方程式を式 (6) ~ (8) に基づいて導出する。

$${}^{n+1}\mathbf{f}_{n+1} = -{}^0\mathbf{R}_{n+1}^T \left\{ \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}} \right)}{\left\| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}} \right\|} f_n - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} f_t \right\} \quad (6)$$

$${}^i\mathbf{f}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1}{}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} + m_i {}^i\ddot{\mathbf{s}}_i \quad (7)$$

$${}^i\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{R}_{i+1}{}^{i+1}\mathbf{n}_{i+1} + {}^i\mathbf{I}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\mathbf{I}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i) + {}^i\hat{\mathbf{s}}_i \times (m_i {}^i\ddot{\mathbf{s}}_i) + {}^i\hat{\mathbf{p}}_{i+1} \times ({}^i\mathbf{R}_{i+1}{}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1}) \quad (8)$$

${}^i\mathbf{f}_i, {}^i\mathbf{n}_i$ はそれぞれリンク $(i-1)$ からリンク i に加えられる力とモーメントを Σ_i で表わしたものである。また、 ${}^i\mathbf{I}_i$ は第 i リンクの重心における慣性行列を表す。手先が地面に与える力 ${}^{n+1}\mathbf{f}_{n+1}$ は抗力・摩擦力の反作用の力となるため、式 (6) のように計算すればよい。式 (7), (8) の Newton と Euler の方程式を手先より根元のリンクまで繰り返すことで全リンクの運動方程式が求まる。ここで全ての関節が iz_i 軸回りの回転を行うように Σ_i を定めた場合、関節駆動力 τ_i と ${}^0\mathbf{n}_i$ の関係は以下のように計算される。

$$\tau_i = {}^i\mathbf{z}_i^T {}^i\mathbf{n}_i + D_i \dot{q}_i \quad (9)$$

ここで、 D_i は関節 i の粘性摩擦係数を表す。

3. 抗力 f_n の導出

本章では抗力 f_n の導出方法について述べる。マニピュレータの手先拘束状態の拘束条件は式 (1) で表され、運動方程式は以下の式 (10) で表される。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{j}_c - \mathbf{j}_t K)f_n = \boldsymbol{\tau} \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ は $n \times n$ の慣性行列、 $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 、 $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ はそれぞれ遠心力/コリオリ力の項及び重力項を表す $n \times 1$ のベクトル、 \mathbf{D} は関節の粘性摩擦係数を表す $n \times n$ の対角行列 $\mathbf{D} = \text{diag}[D_1, D_2, \dots, D_n]$ 、 $\boldsymbol{\tau}$ は $n \times 1$ の入力トルクベクトルである。また、 \mathbf{j}_c と \mathbf{j}_t は以下のように定義される。

$$\mathbf{j}_c \triangleq \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}^T} \right)^T \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}} \right) / \left\| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}} \right\|, \quad \mathbf{j}_t \triangleq \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}^T} \right)^T \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} \quad (11)$$

式 (1) を時間 t で 2 階微分し、 $\ddot{\mathbf{q}}$ の拘束条件を求めるとき、

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \ddot{\mathbf{q}} = 0 \quad (12)$$

が得られる。マニピュレータが常に拘束面に拘束されるためには、式 (10) の解 $\mathbf{q}(t)$ が時間 t に無関係に式 (1) を満たさなければならない。式 (1) の時間微分によって得られた式 (12) を満たす $\ddot{\mathbf{q}}$ と式 (10) の $\ddot{\mathbf{q}}$ が同じ値をとるととき、式 (10) の $\mathbf{q}(t)$ は式 (1) を満たすことになる。式 (10), (12) から $\ddot{\mathbf{q}}$ を消去すると

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \mathbf{M}^{-1} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right)^T \frac{f_n}{\left\| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \right\|} = \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{j}_t K f_n + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} + \mathbf{g} - \boldsymbol{\tau}) - \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (13)$$

が得られる。ここで、

$$m_c \triangleq (\partial C / \partial \mathbf{q}^T) \mathbf{M}^{-1} (\partial C / \partial \mathbf{q}^T)^T \quad (14)$$

と置く。 \mathbf{M}^{-1} は正則であり、 $\partial C / \partial \mathbf{q}^T = (\partial C / \partial \mathbf{r}^T)(\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{q}^T)$ であり $C=0$ は $\partial C / \partial \mathbf{r}^T \neq \mathbf{0}$ を満たす曲面とする。ここで $\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{q}^T$ は行フルランクを仮定し、特異姿勢を除いて考えることにすると、 $\partial C / \partial \mathbf{q}^T \neq \mathbf{0}$ であるから $m_c \neq 0$ である。 m_c を用いると式 (13) は、

$$m_c f_n = \left\| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \right\| \left\{ \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{j}_t K f_n + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} + \mathbf{g} - \boldsymbol{\tau}) - \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} \right\} \quad (15)$$

となり、また

$$\mathbf{d}^T \triangleq \left\| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \right\| \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \mathbf{M}^{-1} \quad (16)$$

と置くと式 (15) は以下のようになる。

$$m_c f_n = \mathbf{d}^T \mathbf{j}_t K f_n - \mathbf{d}^T \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}^T \{ \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} + \mathbf{g} \} - \left\| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \right\| \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

ここで

$$a \triangleq \mathbf{d}^T \{ \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} + \mathbf{g} \} - \left\| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \right\| \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (18)$$

とすると

$$m_c f_n = \mathbf{d}^T \mathbf{j}_t K f_n - \mathbf{d}^T \boldsymbol{\tau} + a \quad (19)$$

となる。さらに

$$A \triangleq m_c - \mathbf{d}^T \mathbf{j}_t K \quad (20)$$

と置くことにより、

$$A f_n = a - \mathbf{d}^T \boldsymbol{\tau} \quad (21)$$

となり、 $A \neq 0$ のとき拘束点の抗力 f_n は入力トルク $\boldsymbol{\tau}$ との代数方程式から求めることができる。

3.1 ヤコビ行列の微分の導出

式 (18) の右辺の第二項目を式変形すると式 (22) のようになる。ただし、手先位置 \mathbf{r} の \mathbf{q} に関するヤコビ行列を $(\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{q}^T) = \mathbf{J}_p$ とおく。

$$\dot{\mathbf{q}} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} = \frac{d \mathbf{q}^T}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \mathbf{J}_p \right) \dot{\mathbf{q}} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \right) \mathbf{J}_p + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \frac{d \mathbf{J}_p}{dt} \right] \dot{\mathbf{q}} \quad (22)$$

よって式 (18) の a を求めるにはヤコビ行列の時間微分を求める必要がある。ここでは、その導出方法について述べる。

まず、回転関節のみで構成されたロボットを仮定すると第 i リンクのヤコビ行列 \mathbf{J}_i は次のように導出されることが知られている。

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{z}_1 \times {}^0 \mathbf{p}_{i,1} & {}^0 \mathbf{z}_2 \times {}^0 \mathbf{p}_{i,2} & \cdots & {}^0 \mathbf{z}_n \times {}^0 \mathbf{p}_{i,n} \\ {}^0 \mathbf{z}_1 & {}^0 \mathbf{z}_2 & \cdots & {}^0 \mathbf{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{pi} \\ \mathbf{J}_{ri} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1) \quad (23)$$

ここで、 \mathbf{J}_{pi} , \mathbf{J}_{ri} はそれぞれリンク i の位置、姿勢のヤコビ行列を表す。 ${}^0 \mathbf{p}_i$ は根元からリンク i までの位置ベクトルであり、 ${}^0 \mathbf{p}_{n+1}$ はマニピュレータの根元から手先までの位置ベクトルを表す。また、 ${}^0 \mathbf{z}_i$, ${}^0 \mathbf{p}_{n+1,i}$ は以下のように定義される。

$${}^0 \mathbf{z}_i = {}^0 \mathbf{R}_i^i \mathbf{z}_i \quad (24)$$

$${}^0 \mathbf{p}_{n+1,i} = {}^0 \mathbf{p}_{n+1} - {}^0 \mathbf{p}_i \quad (25)$$

ここで ${}^i \mathbf{z}_i$ は、2章すでに定義されている。式 (24), (25) の両辺を時間 t で微分すると以下の式が得られる。

$${}^0 \dot{\mathbf{z}}_i = {}^0 \dot{\mathbf{R}}_i^i \mathbf{z}_i + {}^0 \mathbf{R}_i^i \dot{\mathbf{z}}_i = {}^0 \dot{\mathbf{R}}_i^i \mathbf{z}_i = {}^0 \boldsymbol{\omega}_i \times {}^0 \mathbf{R}_i^i \mathbf{z}_i \quad (26)$$

$${}^0 \dot{\mathbf{p}}_{n+1,i} = {}^0 \dot{\mathbf{p}}_{n+1} - {}^0 \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{J}_{p(n+1)} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_{pi} \dot{\mathbf{q}} \quad (27)$$

次に式 (23) 中の ${}^0 \mathbf{z}_i \times {}^0 \mathbf{p}_{n+1,i}$ を時間 t で微分すると式 (26), (27) より以下のようなになる。

$$\frac{d({}^0 \mathbf{z}_i \times {}^0 \mathbf{p}_{n+1,i})}{dt} = {}^0 \dot{\mathbf{z}}_i \times {}^0 \mathbf{p}_{n+1,i} + {}^0 \mathbf{z}_i \times {}^0 \dot{\mathbf{p}}_{n+1,i} = ({}^0 \boldsymbol{\omega}_i \times {}^0 \mathbf{R}_i^i \mathbf{z}_i) \times {}^0 \mathbf{p}_{n+1,i} + {}^0 \mathbf{z}_i \times (\mathbf{J}_{p(n+1)} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_{pi} \dot{\mathbf{q}}) \quad (28)$$

したがって、ヤコビ行列 \mathbf{J}_i の時間微分は以下の式から計算することができる。

$$\dot{\mathbf{J}}_i = \begin{bmatrix} ({}^0 \boldsymbol{\omega}_1 \times {}^0 \mathbf{R}_1^i \mathbf{z}_i) \times {}^0 \mathbf{p}_{n+1,1} + {}^0 \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{J}_{p(n+1)} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_{p1} \dot{\mathbf{q}}) & \cdots & ({}^0 \boldsymbol{\omega}_n \times {}^0 \mathbf{R}_n^n \mathbf{z}_n) \times {}^0 \mathbf{p}_{n+1,n} + {}^0 \mathbf{z}_n \times (\mathbf{J}_{p(n+1)} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_{pn} \dot{\mathbf{q}}) \\ {}^0 \boldsymbol{\omega}_1 \times {}^0 \mathbf{R}_1^1 \mathbf{z}_1 & \cdots & {}^0 \boldsymbol{\omega}_n \times {}^0 \mathbf{R}_n^n \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \quad (29)$$

4. 順動力学問題の解法

n リンク多関節マニピュレータの運動方程式である式 (10) に含まれる $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ を直接計算することは n が大きくなると容易ではない。以下に NE 逆動力学解法を用いた順動力学問題の解法を述べる。

まず $\mathbf{b} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}$ として、式 (10) の左辺を $\boldsymbol{\tau}_p$ と置く。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} - (\mathbf{j}_c - \mathbf{j}_t K) f_n = \boldsymbol{\tau}_p \quad (30)$$

式 (2) ~ (9) に示す逆動力学計算を $\boldsymbol{\tau}_p = \text{INV}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}, f_n, K)$ と表現する時、次式が得られる。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} - (\mathbf{j}_c - \mathbf{j}_t K) f_n = \text{INV}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}, f_n, K) \quad (31)$$

ここで、式 (31) に $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $f_n = 0$ を代入すると $\mathbf{b} = \text{INV}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{0}, \mathbf{g}, 0, K)$ が得られ、次に $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, $f_n = 0$

を式 (31) に代入すると $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{e}_i = \text{INV}(\mathbf{q}, \mathbf{0}, \mathbf{e}_i, \mathbf{0}, 0, K)$ となる。 \mathbf{M}_i は慣性行列の第 i 列を表すベクトル, \mathbf{e}_i は第 i 番目の要素に ‘1’ を持つ単位ベクトル $\mathbf{e}_i = [0, \dots, 1(i), 0, \dots, 0]^T$ であり, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ の要素が列毎に計算される。そして, \mathbf{j}_c は式 (32), \mathbf{j}_t は $\tilde{\tau}$ を以下のように定義することで式 (34) のように求めることができる。

$$\mathbf{j}_c = \text{INV}(\mathbf{q}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, -1, 0) \quad (32)$$

$$\tilde{\tau} \triangleq \mathbf{j}_c - \mathbf{j}_t = \text{INV}(\mathbf{q}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, -1, 1) \quad (33)$$

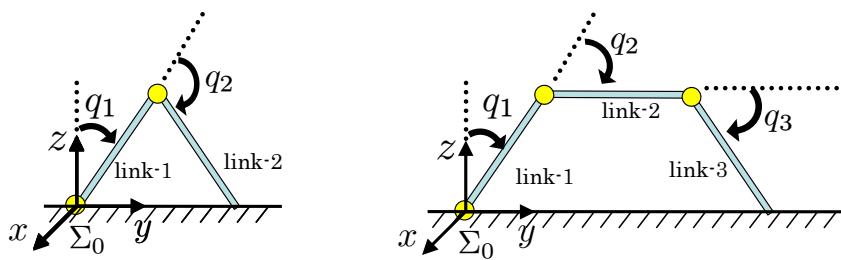
$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j}_c - \tilde{\tau} \quad (34)$$

これより, 式 (16) より \mathbf{d}^T が, 式 (18) より a が, 式 (20) より A が求まるため, 式 (21) より f_n を計算することができる。

ここで, $\mathbf{b}_n = \mathbf{b} - (\mathbf{j}_c - \mathbf{j}_t K) f_n$ と置くと, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ を代入し, 上記で求まった f_n を用いることで, \mathbf{b}_n は $\mathbf{b}_n = \text{INV}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{0}, \mathbf{g}, f_n, K)$ と得られる。したがって, 拘束運動時の各リンクの角加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ は以下のように計算される。

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{b}_n) \quad (35)$$

与式の $\ddot{\mathbf{q}}$ を数値積分することで, 式 (30) の運動方程式を陽に求めることなくハンドが対象物に接触し拘束されているマニピュレータの順動力学計算を行うことができる。



(a) 2-link manipulator

(b) 3-link manipulator

Fig. 2 (a) is model of 2-link manipulator (initial angle: $\mathbf{q} = [-\pi/6, -2\pi/3]^T$) and (b) is model of 3-link manipulator (initial angle: $\mathbf{q} = [-\pi/6, -\pi/3, -\pi/3]^T$).

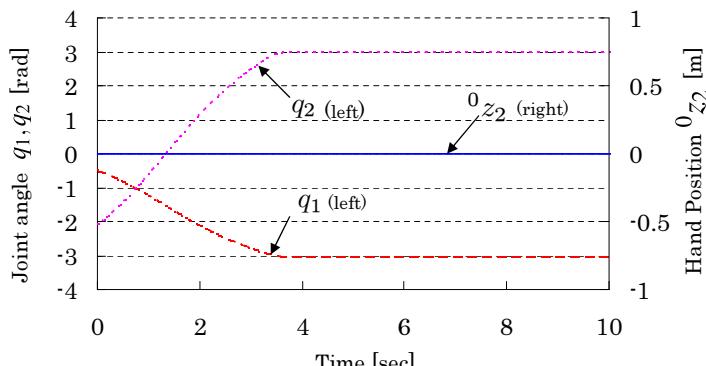


Fig. 3 Time responses of hand position 0z_2 (right scale) and joint angles q_1, q_2 (left scale) of 2-link manipulator are plotted. Input torque was set to $\boldsymbol{\tau} = [-3, 3]^T$. This chart shows that hand position is constrained in ${}^0z_2 = 0$ at all times by the proposed method.

5. 数値シミュレーション

本章では第 2 章～第 4 章で述べた提案方法で拘束条件式 (1) を満たしながら運動する拘束運動を, 2 リンク及び 3 リンクマニピュレータを用いたシミュレーションによって確認する。シミュレーション環境はプログラム作成のため “Borland C++ Builder Professional Ver. 5.0”を用い, 表示には “OpenGL Ver. 1.5.0”を用いた。尚, ルンゲクッタを用いた数値積分時間は 1.0×10^{-2} [sec], 地面の摩擦係数は $K = 0.2$ と設定し, $f_t = 0.2f_n$ である。

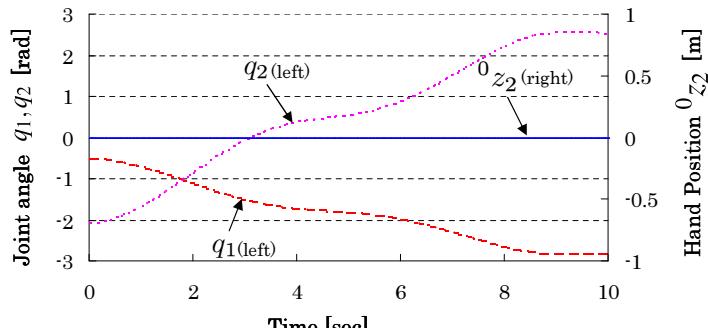


Fig. 4 Hand position and joint angles (2-link, $\tau = [3 \sin \pi t / 3, 3 \sin \pi t / 3]^T$)

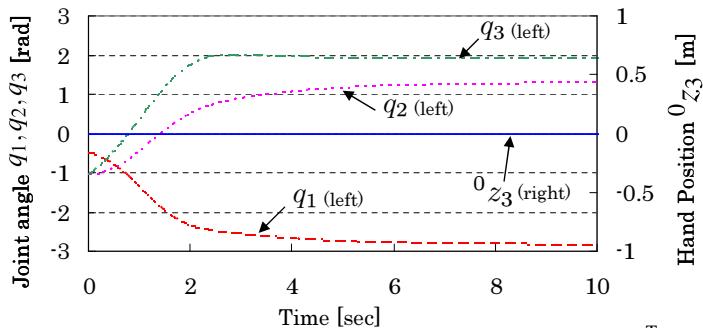


Fig. 5 Hand position and joint angles (3-link, $\tau = [3, 3, 3]^T$)

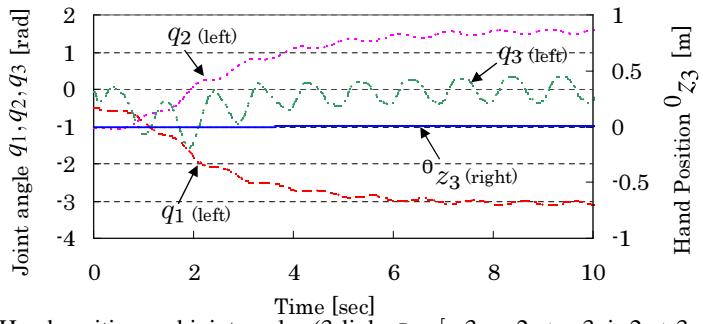


Fig. 6 Hand position and joint angles (3-link, $\tau = [-3 \cos 2\pi t, -3 \sin 2\pi t, 3 \cos 2\pi t]^T$)

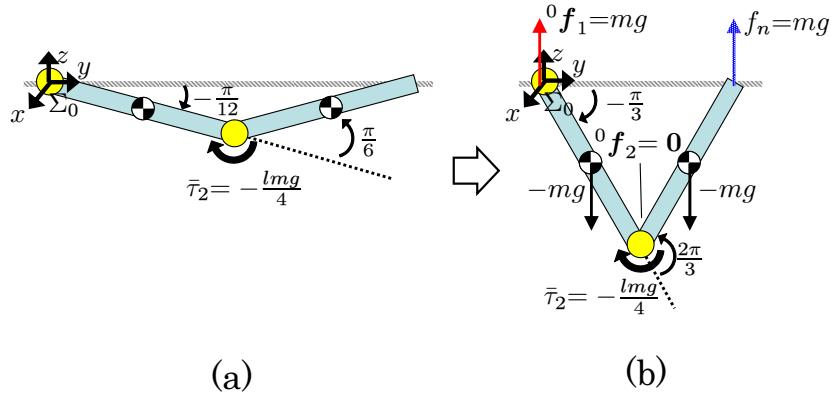


Fig. 7 Initial angle is set to $q = [-\pi/12, \pi/6]^T$ as (a), and a input torque compensating gravity and normal force in such a way as to converge at $q = [-\pi/3, 2\pi/3]^T$ as (b) is set to $\bar{\tau} = [0, -lmg/4]^T$.

5.1 拘束条件維持の確認

図2に示す2リンク及び3リンクマニピュレータを用いて拘束運動のシミュレーションを行う。物理パラメータは各リンクの質量を $m_i = 1.0[\text{kg}]$ 、長さを $l_i = 0.5[\text{m}]$ 、各関節の粘性摩擦係数を $D_i = 3.0[\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}]$ と設定し、

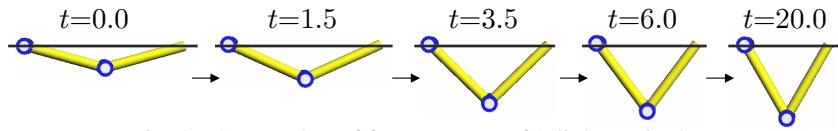


Fig. 8 Screen shot of free response of 2-link manipulator

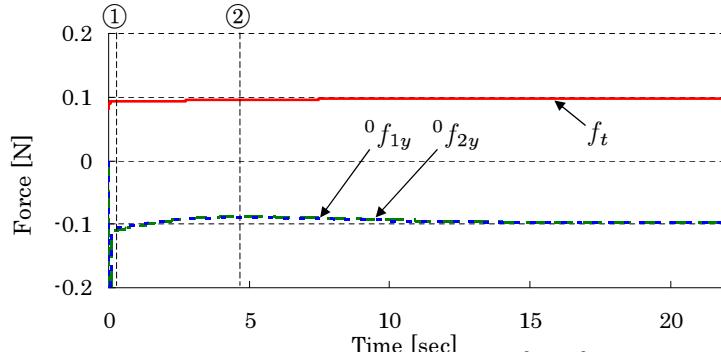
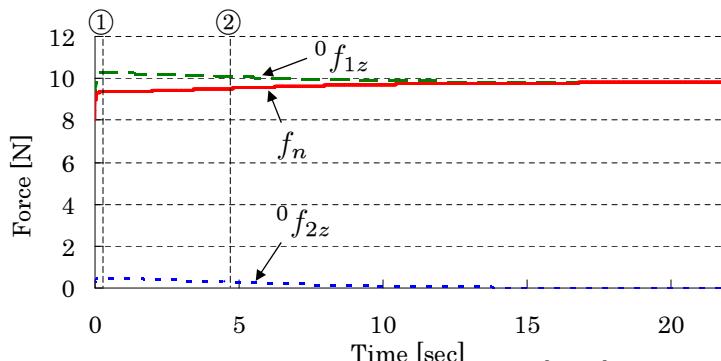
Fig. 9 Time response of y component of forces acting on each link ${}^0f_{1y}$, ${}^0f_{2y}$ and frictional force f_t of 2-link manipulator are plotted.Fig. 10 Time response of z component of forces acting on each link ${}^0f_{1z}$, ${}^0f_{2z}$ and normal force f_n of 2-link manipulator are plotted.

Table 1 Physical parameters of 2-link manipulator

| Link number i | 1 ($i=1$) | 2 ($i=2$) |
|-------------------------|-------------|-------------|
| m_i [kg] | 1.0 | 1.0 |
| l_i [m] | 0.5 | 0.5 |
| D_i [N·m·s/rad] | 3.0 | 3.0 |
| τ_i [N·m] | 0 | -4.9/4 |
| g [m/s ²] | 9.8 | |
| K | 0.01 | |

Table 2 Initial and converged value of $q_1, q_2, {}^0f_1, {}^0f_2, {}^0f_n$

| Link number i | 1 ($i=1$) | 2 ($i=2$) |
|----------------------------------|----------------------|--------------------|
| Initial angle q_i [rad] | $-7\pi/12$ | $\pi/6$ |
| Converged value of q_i [rad] | $-5\pi/6$ | $2\pi/3$ |
| Converged value of 0f_i [N] | $[0, -0.098, 9.8]^T$ | $[0, -0.098, 0]^T$ |
| Converged value of 0f_n [N] | | 9.8 |

図2の姿勢(2リンク : $\mathbf{q} = [-\pi/6, -2\pi/3]$, 3リンク : $\mathbf{q} = [-\pi/6, -\pi/3, -\pi/3]^T$)を初期姿勢とし、入力トルク $\boldsymbol{\tau}$ [N]を変化させてシミュレーションを行った。図2に示すように、2リンクおよび3リンクマニピュレータともに y - z 平面内の運動である。

2リンクマニピュレータに任意の入力の一例として2種類の入力 $\boldsymbol{\tau} = [-3, 3]^T$, $\boldsymbol{\tau} = [3 \sin \pi t / 3, 3 \sin \pi t / 3]^T$ を与えたときのリンク2の先端の z 座標 0z_2 と各リンクの角度 q_1, q_2 の値の時間変化をそれぞれ図3, 4に示す。同様に3リンクマニピュレータに2種類の入力 $\boldsymbol{\tau} = [3, 3, 3]^T$, $\boldsymbol{\tau} = [-3 \cos 2\pi t, -3 \sin 2\pi t, 3 \cos 2\pi t]^T$ を与えたときのリンク3の先端の z 座標 0z_3 と各リンクの角度 q_1, q_2, q_3 の値の時間変化をそれぞれ図5, 6に示す。これらのグラフから任意の入力を与えても手先の座標 ${}^0z_2, {}^0z_3$ は常に0に拘束されており、これにより今回提案する繰り返し計算で拘束状態を表現できることを確認した。

5.2 拘束運動中の各関節に作用する力の時間変化

前節では提案手法が拘束運動の生成に関して、常に拘束条件を満たしつつ変化する運動を表現している点について確認した。リンク $i-1$ からリンク i に作用する力 ${}^i\mathbf{f}_i$ とモーメント ${}^i\mathbf{n}_i$ の計算は式 (31) に示すように NE 法の逆動力学計算過程に含まれており、ここでは NE 法が運動を生成する力・トルクとそれ以外の運動生成には無関係な力・トルクの両方を計算することができる特徴を持っている点について注目する。また、座標系 Σ_0 からみた作用力は ${}^0\mathbf{f}_i = {}^0\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{f}_i$ によって計算が可能であり、本節では拘束運動中の作用力 ${}^0\mathbf{f}_i$ が正しく計算されていることを確認し、作用力・抗力の時間応答を調べる。

まず、2 リンクマニピュレータにおいて各リンク間に働く作用力、抗力を調べた。ここでは初期形状と目標形状の平衡点が特異姿勢になることを避けるために図 7(a) を初期形状として与え、また図 7(b) の姿勢が安定平衡点となるような重力、拘束力を補償する入力として式 (36) で与えられる $\bar{\tau}$ を τ として与えた。

$$\bar{\tau} = [0, -mgl/4]^T \quad (36)$$

ここで $l_1 = l_2 = l$ とし、摩擦係数を $K = 0.01$ 、初期姿勢を図 7(a) に示すように $\mathbf{q} = [-7\pi/12, \pi/6]$ とする。シミュレーションはマニピュレータが静止状態（各関節の角速度が $|\dot{q}_i| < 0.001$ [rad/s] を満たすときを静止と判定する）となるまで行う。シミュレーションのスクリーンショットを図 8 に、各関節に働く力 ${}^0\mathbf{f}_1 = [{}^0f_{1x}, {}^0f_{1y}, {}^0f_{1z}]^T$, ${}^0\mathbf{f}_2 = [{}^0f_{2x}, {}^0f_{2y}, {}^0f_{2z}]^T$ の y 成分と手先に働く摩擦力 f_t の時間応答を図 9 に、 ${}^0\mathbf{f}_1$, ${}^0\mathbf{f}_2$ の z 成分と抗力 f_n の時間応答を図 10 に、また、物理パラメータを表 1 に、初期値、最終値を表 2 に示す。

図 9, 10 には、 $t = 0.10$ の運動初期の時刻を①とし、 $t = 4.85$ の時刻を②として示している。①, ②について、 y , z 方向に働く力と加速度の方向を表したもの図 11 に示す。リンク i に作用する力として f_{iy} , f_{iz} はそれぞれリンク $i-1$ からリンク i に作用する力の y , z 成分、 $-f_{(i+1)y}$, $-f_{(i+1)z}$ はそれぞれリンク $i+1$ からリンク i に作用する力の y , z 成分であり、 f_n は抗力、 f_t は摩擦力、 mg は重力を表す。図 11(a) は y 軸方向のハンドの運動は y 軸マイナス方向に加速する運動であることを表しており、図 11(c) は加速度が y 軸プラス方向の減速運動であることを表している。図 11(b) は落下方向 (z 軸マイナス方向) に加速度を発生しているが、図 11(d) では加速度の方向は z 軸プラス方向であり、減速運動であることがわかる。

さらにリンク 1, 2 に作用する力については図 9 に y 方向に働く力を示しており、図 10 に z 方向に働く力を示している。① ($t = 0.10$) のときの各力は ${}^0\mathbf{f}_1 = [0, -0.129, 10.252]^T$, ${}^0\mathbf{f}_2 = [0, -0.120, 0.464]^T$, $f_t = 0.093$, $f_n = 9.324$ となっている。また、リンク i の Σ_0 から見た質量中心の並進加速度は ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_i = {}^0\mathbf{R}_i {}^i\ddot{\mathbf{s}}_i$ より導出でき、Ⓐ ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_1 = [0, -0.009, -0.012]^T$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_2 = [0, -0.027, -0.012]^T$ という結果が得られた。さらに $t = 0.10$ のときのリンク i に働く全外力を ${}^0\hat{\mathbf{f}}_i = [{}^0\hat{f}_{ix}, {}^0\hat{f}_{iy}, {}^0\hat{f}_{iz}]^T$ と表し、それについて調べると、

$${}^0\hat{f}_{1y} = {}^0f_{1y} - {}^0f_{2y} = -0.009 \quad (37)$$

$${}^0\hat{f}_{1z} = {}^0f_{1z} - {}^0f_{2z} - mg = -0.012 \quad (38)$$

$${}^0\hat{f}_{2y} = {}^0f_{2y} + f_t = -0.027 \quad (39)$$

$${}^0\hat{f}_{2z} = {}^0f_{2z} + f_n - mg = -0.012 \quad (40)$$

となる。したがって、リンク 1, 2 の質量中心の並進加速度はそれぞれ ${}^0\hat{\mathbf{f}}_1/m_1 = [0, -0.009, -0.012]^T$, ${}^0\hat{\mathbf{f}}_2/m_2 = [0, -0.027, -0.012]^T$ となり、上記のⒶ ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_1$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_2$ の値と一致している。

次に② ($t = 4.85$) のときの各リンクに働く力と加速度は、 ${}^0\mathbf{f}_1 = [0, -0.088, 10.074]^T$, ${}^0\mathbf{f}_2 = [0, -0.090, 0.271]^T$, $f_t = 0.095$, $f_n = 9.533$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_1 = [0, 0.002, 0.003]^T$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_2 = [0, 0.006, 0.003]^T$ という結果が得られた。よって式 (37) ~ (40) と同様にして $t = 4.85$ のときの各リンクに働く全外力は ${}^0\hat{\mathbf{f}}_1 = [0, 0.002, 0.003]^T$, ${}^0\hat{\mathbf{f}}_2 = [0, 0.006, 0.003]^T$ となる。したがって、リンク 1, 2 の質量中心の並進加速度はそれぞれ ${}^0\hat{\mathbf{f}}_1/m_1 = [0, 0.002, 0.003]^T$, ${}^0\hat{\mathbf{f}}_2/m_2 = [0, 0.006, 0.003]^T$ となり、①の時刻と同様に②の時刻における加速度と作用力の関係は矛盾がない。

次に、3 リンクマニピュレータにおいて各リンク間に働く作用力、抗力を調べた。 $\mathbf{q} = [0, -\pi/2, -\pi/2]^T$ の平衡点から角度を 0.05 度ずつずらした図 12(a) の姿勢 ($\mathbf{q} = [-0.05, -\pi/2 + 0.05, -\pi/2 + 0.05]^T$) を初期姿勢とし、最終的に図 12(b) の平衡点に収束する自由応答シミュレーションを行った。このシミュレーションのスクリーンショットを図 13 に、各関節に働く力 ${}^0\mathbf{f}_1 = [{}^0f_{1x}, {}^0f_{1y}, {}^0f_{1z}]^T$, ${}^0\mathbf{f}_2 = [{}^0f_{2x}, {}^0f_{2y}, {}^0f_{2z}]^T$, ${}^0\mathbf{f}_3 = [{}^0f_{3x}, {}^0f_{3y}, {}^0f_{3z}]^T$, の y 成分と手先に働く摩擦力 f_t の時間応答を図 14 に、 z 成分と抗力 f_n の時間応答を図 15 に、また、物理パラメータを表 3 に、初期値、最終値を表 4 に示す。図 14, 15 には、 $t = 3.01$ の時刻を③とし、 $t = 3.95$ の時刻を④として示している。

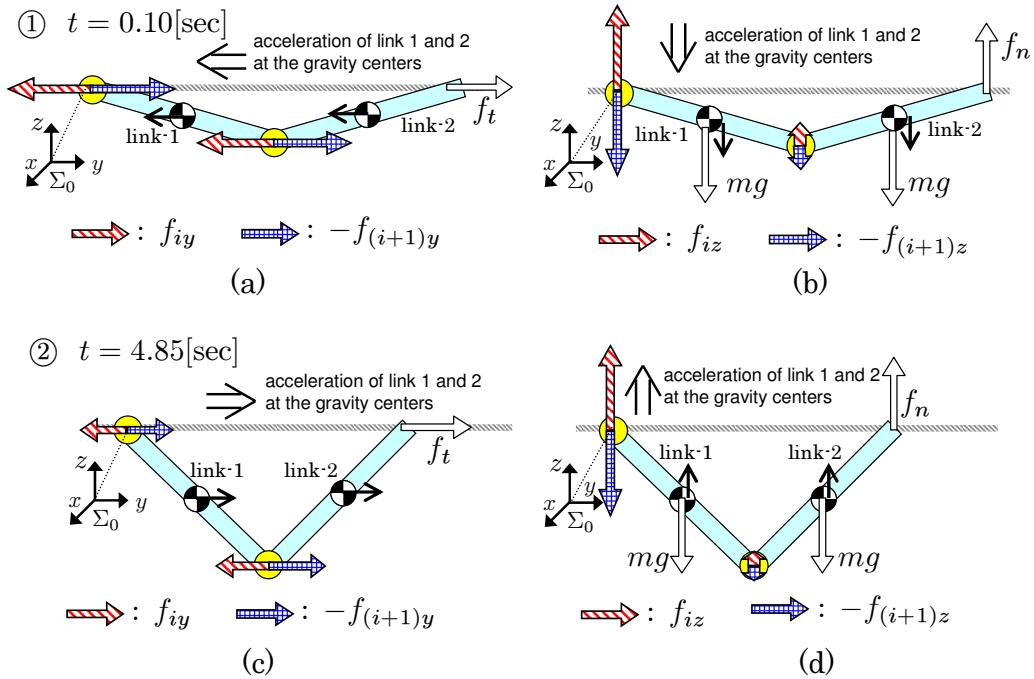


Fig. 11 →: Direction of each link's acceleration
Forces acting on each link and accelerations of each link at ① $t = 0.10$ [sec] are shown at (a) as for y -direction and (b) as for z -direction. Also, at ② $t = 4.85$ [sec] they are shown at (c) as for y -direction and (d) as for z -direction.

③, ④について、 y , z 方向に働く力と加速度の方向を表したものを図 16 に示す。③($t = 3.01$)のときの各力と、各加速度は ${}^0\mathbf{f}_1 = [0, 0.368, 16.952]^T$, ${}^0\mathbf{f}_2 = [0, 0.308, 7.322]^T$, ${}^0\mathbf{f}_3 = [0, 0.197, -2.134]^T$, $f_t = -0.118$, $f_n = 11.760$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_1 = [0, 0.060, -0.170]^T$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_2 = [0, 0.111, -0.343]^T$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_3 = [0, 0.079, -0.174]^T$ となり、式 (37) ~ (40) と同様にして計算すると $t = 3.01$ のときの各リンクに働く全外力は ${}^0\hat{\mathbf{f}}_1 = [0, 0.060, -0.170]^T$, ${}^0\hat{\mathbf{f}}_2 = [0, 0.111, -0.343]^T$, ${}^0\hat{\mathbf{f}}_3 = [0, 0.079, -0.174]^T$ となる。したがって ${}^0\hat{\mathbf{f}}_i/m_i$ から得られる加速度の値と一致するため、加速度と作用力の関係は矛盾がない。

次に④($t = 3.95$)のときの各力と、各加速度は ${}^0\mathbf{f}_1 = [0, -1.772, 16.826]^T$, ${}^0\mathbf{f}_2 = [0, -1.499, 7.033]^T$, ${}^0\mathbf{f}_3 = [0, -0.968, -2.803]^T$, $f_t = -0.127$, $f_n = 12.658$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_1 = [0, -0.274, -0.007]^T$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_2 = [0, -0.007, -0.036]^T$, ${}^0\ddot{\mathbf{s}}_3 = [0, -0.841, -0.055]^T$ となり、 $t = 3.95$ のときの各リンクに働く全外力は ${}^0\hat{\mathbf{f}}_1 = [0, -0.274, -0.007]^T$, ${}^0\hat{\mathbf{f}}_2 = [0, -0.007, -0.036]^T$, ${}^0\hat{\mathbf{f}}_3 = [0, -0.841, -0.055]^T$ となる。したがって ${}^0\hat{\mathbf{f}}_{iz}/m_i$ から得られる加速度の値と一致するため、加速度と作用力の関係は矛盾がない。また図 14 より時刻④付近で y 方向の作用力が負の方向で最大になっている。このときのマニピュレータの形状は、図 13 および図 16 (c), (d) に示すように特異形状に近い形となっていることがわかる。これは各リンクに働く力は、特異形状付近で大きくなることを示している。

Table 3 Physical parameters of 3-link manipulator

| Link number i | 1 ($i=1$) | 2 ($i=2$) | 3 ($i=3$) |
|-------------------------|-------------|-------------|-------------|
| m_i [kg] | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| l_i [m] | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| D_i [N · m · s/rad] | 3.0 | 3.0 | 3.0 |
| τ_i [N · m] | 0 | 0 | 0 |
| g [m/s ²] | | 9.8 | |
| K | | 0.01 | |

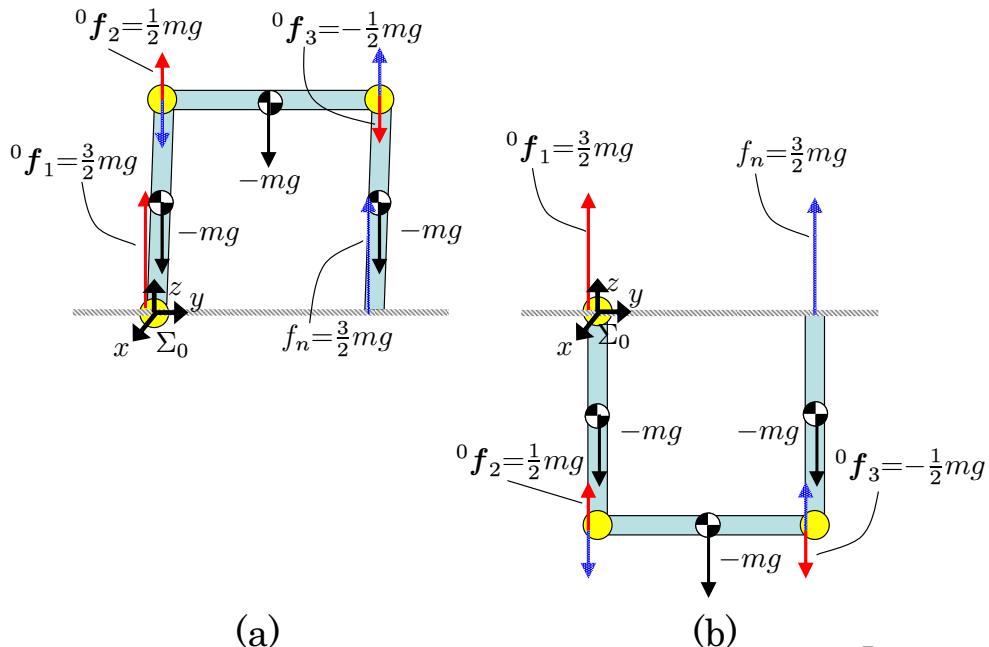


Fig. 12 Initial angle of 3-link manipulator is set to $\mathbf{q} = [-0.05, -\pi/2 + 0.05, -\pi/2 + 0.05]^T$ as (a). As a result of free response ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$), manipulator converged at $\mathbf{q} = [-\pi, \pi/2, \pi/2]^T$ as (b).

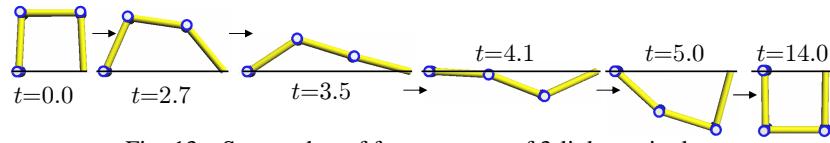


Fig. 13 Screen shot of free response of 3-link manipulator

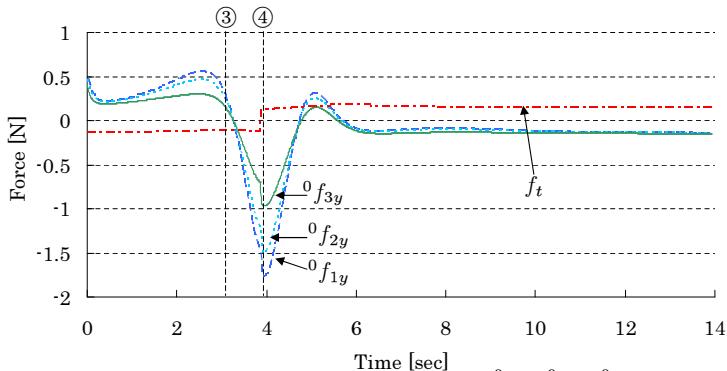


Fig. 14 Time response of y component of forces acting on each link ${}^0f_{1y}$, ${}^0f_{2y}$, ${}^0f_{3y}$ and frictional force f_t of 3-link manipulator are plotted.

Table 4 Initial and converged values of $q_1, q_2, q_3, {}^0f_1, {}^0f_2, {}^0f_3, {}^0f_n$

| Link number i | 1 ($i=1$) | 2 ($i=2$) | 3 ($i=3$) |
|----------------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| Initial angle q_i [rad] | -0.05 | $-\pi/2 + 0.05$ | $-\pi/2 + 0.05$ |
| Converged value of q_i [rad] | $-\pi$ | $\pi/2$ | $\pi/2$ |
| Converged value of 0f_i [N] | $[0, -0.147, 14.7]^T$ | $[0, -0.147, 4.9]^T$ | $[0, -0.147, -4.9]^T$ |
| Converged value of 0f_n [N] | | 14.7 | |

6. 結 言

本論文では、Newton-Euler 法の逆動力学計算を利用した拘束運動を表現するための繰り返し計算について提案し、順動力学計算の解法について示した。またシミュレーション結果から、この計算法によりマニピュレータの

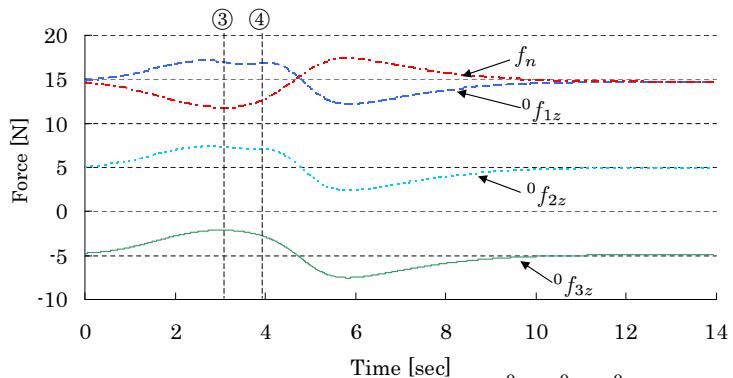


Fig. 15 Time response of z component of forces acting on each link ${}^0f_{1z}$, ${}^0f_{2z}$, ${}^0f_{3z}$ and normal force f_n of 3-link manipulator are plotted.

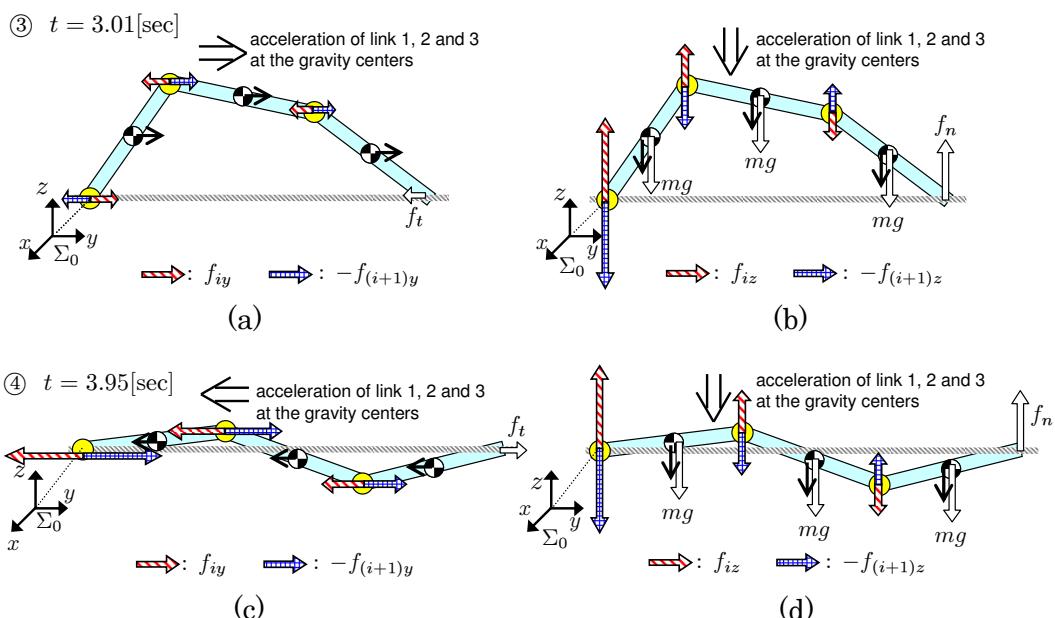


Fig. 16 → Forces acting on each link and accelerations of each link at ③ $t = 3.01$ [sec] are shown at (a) as for y -direction and (b) as for z -direction. Also, at ④ $t = 3.95$ [sec] they are shown at (c) as for y -direction and (d) as for z -direction.

手先拘束運動を表現でき、各リンク間に働く力の計算が可能であることを示した。

今後の方針としては、今回提案した計算法について拘束条件が2つ以上ある多点拘束の場合に拡張し、数値シミュレーションにより評価していくことが挙げられる。

文 献

- Anitescu, M. and Potra, A. F., A time-stepping method for stiff multibody dynamics with contact and friction, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 55 (2002), pp. 753-784.
- Brady, M., Hollerbach, J. M., Johnson, T. L., Lozano-Perez, T. and Mason, M. T., Robot motion: planning and control (1982), pp. 51-71, The MIT Press.
- Featherstone, R. and Orin, D., Robot dynamics: equations and algorithms, IEEE International Conference on Robotics and Automation (2000), pp. 826-834.
- 長谷川 晶一, 三武 裕玄, 田崎 勇一, 動作行動開発のための物理エンジン Springhead, 日本ロボット学会誌, Vol. 30, No. 9 (2012), pp. 841-848.
- Hemami, H. and Wyman, B. F., Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 4 (1979), pp. 526-535.

- Hooker, W.W. and Margulies, G., The dynamical attitude equations for an n-body Satellite, Journal of Astronautical Sciences, Vol. 12 (1965), pp. 123-128.
- Huang, Y. F. and Lee, C. S. G., Generalization of Newton-Euler formulation of dynamic equations to nonrigid manipulators, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 110, No. 3 (1988), pp. 308-315.
- Luh, J. Y. S., Walker, M. W., and Paul, R. P. C., On-line computational scheme for mechanical manipulator, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 102, No. 2 (1980), pp. 69-76.
- Minami, M., Asakura, T., Dong, L. X. and Huang, Y. M., Position control and explicit force control of constrained motions of a manipulator for accurate grinding tasks, Advanced Robotics, Vol. 11, No. 3 (1997), pp. 285-300.
- 中村 仁彦, 山根 克, 拘束条件が不連続に変化するリンク系の動力学—環境と接触しながら運動するヒューマン・フィギュアへの応用, 日本ロボット学会誌, Vol. 18, No. 3 (2000), pp. 435-443.
- Orin, D. E., McGhee, R. B., Vucobratovic, M., and Hartoch, G., Kinematic and kinetic analysis of open-chain linkages utilizing Newton-Euler methods, Mathematical Biosciences, Vol. 43, Iss. 1-2 (1979), pp. 107-130.
- Stepanenko, Y. and Vukobratovic, M., Dynamics of articulated open-chain active mechanisms', Mathematical Biosciences, Vol. 28, Iss. 1-2 (1976), pp. 137-170.
- Walker, M. W. and Orin, D. E., Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 104, No. 3 (1982), pp. 205-211.

References

- Anitescu, M. and Potra, A. F., A time-stepping method for stiff multibody dynamics with contact and friction, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 55 (2002), pp. 753-784.
- Brady, M., Hollerbach, J. M., Johnson, T. L., Lozano-Perez, T. and Mason, M. T., Robot motion: planning and control (1982), pp. 51-71, The MIT Press.
- Featherstone, R. and Orin, D., Robot dynamics: equations and algorithms, IEEE International Conference on Robotics and Automation (2000), pp. 826-834.
- Hasegawa, S., Mitrake, H. and Tazaki, Y., Springhead: A physics engine for motion and behavior, Journal of RSJ, Vol. 30, No. 9 (2012), pp.841-848 (in Japanese).
- Hemami, H. and Wyman, B. F., Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 4 (1979), pp. 526-535.
- Hooker, W.W. and Margulies, G., The dynamical attitude equations for an n-body Satellite, Journal of Astronautical Sciences, Vol. 12 (1965), pp. 123-128.
- Huang, Y. F. and Lee, C. S. G., Generalization of Newton-Euler formulation of dynamic equations to nonrigid manipulators, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 110, No. 3 (1988), pp. 308-315.
- Luh, J. Y. S., Walker, M. W., and Paul, R. P. C., On-line computational scheme for mechanical manipulator, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 102, No. 2 (1980), pp. 69-76.
- Minami, M., Asakura, T., Dong, L. X. and Huang, Y. M., Position control and explicit force control of constrained motions of a manipulator for accurate grinding tasks, Advanced Robotics, Vol. 11, No.3 (1997), pp. 285-300.
- Nakamura, Y. and Yamane, K., Dynamics of kinematic chains with discontinuous changes of constraints—application to human figures that move in contact with the environments—, Journal of RSJ, Vol.18, No.3 (2000), pp.435–443 (in Japanese).
- Orin, D. E., McGhee, R. B., Vucobratovic, M., and Hartoch, G., Kinematic and kinetic analysis of open-chain linkages utilizing Newton-Euler methods, Mathematical Biosciences, Vol. 43, Iss. 1-2 (1979), pp. 107-130.
- Stepanenko, Y. and Vukobratovic, M., Dynamics of articulated open-chain active mechanisms', Mathematical Biosciences, Vol. 28, Iss. 1-2 (1976), pp. 137-170.
- Walker, M. W. and Orin, D. E., Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms, Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 104, No. 3 (1982), pp. 205-211.