

肘つき拘束による高精度かつ省エネルギーな運動

山本賢(福井大学) 見浪護(福井大学)

Modeling of Constrained Motion with Multi-point Elbow and Simulated Evaluation

*Masaru YAMAMOTO (University of Fukui), Mamoru MINAMI (University of Fukui)

Abstract—In this paper, it proposes a dynamical robot model with multi-point elbow(Its modeling is realized through the integration of constrained multi-point state and motion equation). The simulation result shows that energy consumption when elbow is attached less than elbow is not attached.

Key Words: Redundant Manipulator, Constrained Motion with Elbow, Dynamical Model

1. 緒言

多関節マニピュレータはリンクの数が増えるほど自重が増してしまい、制御する為にはより大きな力が必要となる。また、自重によって手先が下がってしまい、手先の精度も悪くなる。そこで、人間が肘をつくことによって少ない力で正確に作業を行えることを考え、同様に多関節マニピュレータにも同じことが言えるであろうと考える。本研究では、多点肘つきロボットの動力学モデル(多点拘束状態と運動方程式の統合によりモデル化を実現)を提案し、このモデルを使用して、肘をついたほうが肘をつかない時より少ない消費エネルギーで正確に作業が行えることをシミュレーションにより示す。

2. 拘束運動

2.1 ハンド拘束運動

ここでは次節で述べる肘つき拘束運動の説明の準備のため、剛体リンクからなる s リンクマニピュレータの位置/力制御について考え、拘束面に接触しつつリンク先端のハンドで接触作業を行うロボットについて考える。ただし、ここでは接点での摩擦力は無視できるものとする。 L をラグランジアン、 $q \in R^s$ を一般化座標、 $\tau \in R^s$ を一般化入力、また u をラグランジュの未定定数、 f_t を摩擦力とするハンド拘束状態のラグランジュの方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = \tau + \left(\frac{\partial C}{\partial q^T} \right)^T u - \left(\frac{\partial r}{\partial q^T} \right)^T \frac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|} f_t \quad (1)$$

と表される。ここで、手先の位置・姿勢ベクトル $r \in R^s$ と超曲面を表すスカラー関数の拘束条件 C は、順運動学関係式より、

$$r = r(q) \quad (2)$$

$$C(r(q)) = 0 \quad (3)$$

と表される。ここで拘束されるハンドは作業座標系の中で非拘束方向に運動できる自由度が残されていることから $s > 1$ である。ハンドに作用する拘束力 f_n で表すとき、 u と f_n の関係は、

$$u = f_n / \left\| \frac{\partial C}{\partial r^T} \right\| \quad (4)$$

となる。ここで $\| \cdot \|$ はベクトルのユークリッドノルムを表す。拘束力 f_n が作用するマニピュレータの運動方程式は、式(1)と式(4)、そして関節の粘性摩擦により、

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) + D\dot{q} = \tau + \left\{ \left(\frac{\partial C}{\partial q^T} \right)^T / \left\| \frac{\partial C}{\partial r^T} \right\| \right\} f_n - \left(\frac{\partial r}{\partial q^T} \right)^T \frac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|} f_t \quad (5)$$

が導かれる[1]。 M は $s \times s$ の慣性行列、 H と G はコリオリ力・遠心力と重力の影響を表す $s \times 1$ の縦ベクトル、 D は関節の粘性摩擦係数を表す $s \times s$ の対角行列 $D = \text{diag}[D_1, D_2, \dots, D_s]$ である。また、本研究では一般化座標 q は関節角度、一般化入力 τ は入力トルクを表す。

2.2 肘つき拘束運動

s リンクマニピュレータの中間リンクが p 個の拘束

$$C_i(r_i(q)) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (6)$$

を受けているときの運動方程式について考える。ここで r_i は拘束を受けている第 i リンクの位置/姿勢を表す運動学方程式であり、式(2)と同様、

$$r_i = r_i(q) \quad (7)$$

である。

式(5)は、ハンド拘束運動を表している。拘束条件が複数存在する場合には、式(5)の右辺第2項の拘束力の係数ベクトルと右辺第3項の摩擦力の係数ベクトルはそれぞれ、

$$\left(\frac{\partial C_i}{\partial q^T} \right)^T / \left\| \frac{\partial C_i}{\partial r^T} \right\| = j_{c_i}^T \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial q^T} \right)^T \frac{\dot{r}_i}{\|\dot{r}_i\|} = j_{t_i}^T \quad (9)$$

の $s \times 1$ の縦ベクトルとなる。さらに、

$$J_c^T = [j_{c_1}^T, j_{c_2}^T, \dots, j_{c_p}^T] \quad (10)$$

$$J_t^T = [j_{t_1}^T, j_{t_2}^T, \dots, j_{t_p}^T] \quad (11)$$

$$f_n = [f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{np}]^T \quad (12)$$

$$f_t = [f_{t1}, f_{t2}, \dots, f_{tp}]^T \quad (13)$$

と定義する。 J_c^T, J_t^T は $s \times p$ 行列であり、 f_n, f_t は $p \times 1$ の縦ベクトルである。これらを考慮すると、 p 個の点で中間リンクが拘束されているマニピュレータの運動方程式は、

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} \\ = \boldsymbol{\tau} + \sum_{i=1}^p (\mathbf{j}_{ci}^T f_{ni}) - \sum_{i=1}^p (\mathbf{j}_{ti}^T f_{ti}) \\ = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_c^T f_n - \mathbf{J}_t^T f_t \end{aligned} \quad (14)$$

となる。また、式(6)を時間 t で 2 回微分し、 $\ddot{\mathbf{q}}$ の拘束条件を求めるとき、

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \dot{\mathbf{q}} \right] \ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \ddot{\mathbf{q}} = 0 \quad (15)$$

が得られる。マニピュレータが常に拘束面に拘束されるためには、式(14)の解 $\mathbf{q}(t)$ が時間 t に無関係に式(6)を満たさなければならない。式(6)の時間微分によって得られた式(15)を満たす $\ddot{\mathbf{q}}$ と式(14)の $\ddot{\mathbf{q}}$ が同じ値をとるとき、式(14)の $\mathbf{q}(t)$ は式(6)を満たすことになる。

2.3 モータを含めたロボットダイナミクス

本研究では、マニピュレータの関節を動かすのに使用するモータを直流サーボモータの等価な電子回路とする。ここで、モータの端子電圧 v_i 、抵抗 R_i 、インダクタンス L_i 、回路を流れる電流 i_i 、モータの角変位 θ_i 、発生トルク τ_{gi} 、負荷トルク τ_{Li} 、逆起電力 v_{gi} 、モータの慣性モーメント I_{mi} 、逆起電力定数 K_{Ei} 、トルク定数 K_{Ti} 、減速機の粘性摩擦係数 d_{mi} とする。このときモータについて次の関係式が成り立つ [2]。

$$\text{電圧方程式: } v_i(t) = L_i \dot{i}_i + R_i i_i(t) + v_{gi}(t) \quad (16)$$

$$\text{逆起電力: } v_{gi}(t) = K_{Ei} \dot{\theta}_i(t) \quad (17)$$

$$\text{運動方程式: } I_{mi} \ddot{\theta}_i = \tau_{gi}(t) - \tau_{Li}(t) - d_{mi} \dot{\theta}_i \quad (18)$$

$$\text{発生トルク: } \tau_g(t) = K_{Ti} i_i(t) \quad (19)$$

ただし、磁界と各定数との関係から直流モータでは、 $K_{Ti} = K_{Ei} (= K)$ であることが知られている。

ここで、式(17)を式(16)に、式(19)を式(18)にそれぞれ代入すると、

$$v_i = L_i \dot{i}_i + R_i i_i + K_i \dot{\theta}_i \quad (20)$$

$$I_{mi} \ddot{\theta}_i = K_i i_i - \tau_{Li} - d_{mi} \dot{\theta}_i \quad (21)$$

となる。また、モータを減速比が k_i の歯車列を介してマニピュレータに取り付けた場合、

$$\dot{\theta}_i = k_i q_i \quad (22)$$

$$\tau_{Li} = \frac{\tau_i}{k_i} \quad (23)$$

となり、式(20)、式(21)を i_i と τ_i の式にすると、

$$L_i \dot{i}_i = v_i - R_i i_i - K_i k_i \dot{q}_i \quad (24)$$

$$\tau_i = -I_{mi} k_i^2 \ddot{q}_i + K_i k_i i_i - d_{mi} k_i^2 \dot{q}_i \quad (25)$$

となる。式(24)、式(25)をベクトル、行列で表記する場合、

$$L \dot{\mathbf{i}} = \mathbf{v} - \mathbf{R} \mathbf{i} - \mathbf{K}_m \dot{\mathbf{q}} \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_m \mathbf{i} - \mathbf{D}_m \dot{\mathbf{q}} \quad (27)$$

と置く。ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [v_1, v_2, \dots, v_s]^T \\ \mathbf{i} &= [i_1, i_2, \dots, i_s]^T \end{aligned} \quad (28)$$

であり、また、

$$\mathbf{L} = \text{diag}[L_1, L_2, \dots, L_s]$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}[R_1, R_2, \dots, R_s]$$

$$\mathbf{K}_m = \text{diag}[K_{m1}, K_{m2}, \dots, K_{ms}]$$

$$\mathbf{J}_m = \text{diag}[J_{m1}, J_{m2}, \dots, J_{ms}]$$

$$\mathbf{D}_m = \text{diag}[D_{m1}, D_{m2}, \dots, D_{ms}]$$

$$K_{mi} = K_i k_i, \quad J_{mi} = I_{mi} k_i^2, \quad D_{mi} = d_{mi} k_i^2$$

と定義し、すべて正の要素を持つ。

式(27)を式(14)に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_m) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_m) \dot{\mathbf{q}} \\ = \mathbf{K}_m \mathbf{i} + \mathbf{J}_c^T \mathbf{f}_n - \mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t \end{aligned} \quad (29)$$

となる。(14)と式(15)の関係と同様に、式(15)を満たす $\ddot{\mathbf{q}}$ と式(29)の $\ddot{\mathbf{q}}$ が同じ値をとるとき、式(29)の $\mathbf{q}(t)$ は式(6)を満たすことになる。

2.4 複数拘束条件付、ロボット/モータの連立方程式

式(29)と式(15)の $\ddot{\mathbf{q}}$ が同じ値をとるため、拘束力 \mathbf{f}_n は従属的に決定される。この関係を陽に表すため、式(29)、式(15)を、

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \mathbf{J}_m) \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_c^T \mathbf{f}_n \\ = \mathbf{K}_m \mathbf{i} - \mathbf{H} - \mathbf{G} - (\mathbf{D} + \mathbf{D}_m) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \ddot{\mathbf{q}} &= - \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \dot{\mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (31)$$

と变形する。式(31)の左辺の $\partial C_i / \partial \mathbf{q}^T$ は $1 \times s$ の横ベクトルであり、右辺の $\dot{\mathbf{q}}^T \left[(\partial / \partial \mathbf{q}) (\partial C_i / \partial \mathbf{q}^T) \right] \dot{\mathbf{q}}$ は 1×1 のスカラーである。式(30)、式(31)、式(24)を合わせて以下の様な式に表す。ただし、計算の簡単化のため、

摩擦力 $j_{ti}^T f_{ti} = 0 (i = 1, 2, \dots, p)$ とする .

$$\begin{bmatrix} M + J_m & -j_{c_1}^T & \cdots & -j_{c_p}^T & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial C_1}{\partial q^T} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial C_p}{\partial q^T} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ f_{n1} \\ \vdots \\ f_{np} \\ i_1 \\ \vdots \\ i_s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_m i - H - G - (D + D_m) \dot{q} \\ -\dot{q}^T \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial C_1}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} \\ \vdots \\ -\dot{q}^T \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial C_p}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} \\ v_1 - R_1 i_1 - K_{m1} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ v_i - R_s i_s - K_{ml} \dot{q}_s \end{bmatrix} \quad (32)$$

慣性項 $(M + J_m)$ が $s \times s$ 行列 , 拘束力の係数ベクトル j_{ci}^T が $s \times 1$ の縦ベクトル , $\partial C_i / \partial q^T$ が $1 \times s$ の横ベクトル , インダクタンス L が $s \times s$ の対角行列であることがより , 式 (32) の左辺第 1 項の行列は $(2s+p) \times (2s+p)$ 行列である .

式 (32) は式 (10) , 式 (12) , (26) の定義を用いると次のように表される .

$$\begin{bmatrix} M + J_m & -J_c^T & 0 \\ \frac{\partial C}{\partial q^T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ f_n \\ i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_m i - H - G - (D + D_m) \dot{q} \\ -\dot{q}^T \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial C}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} \\ v - Ri - K_m \dot{q} \end{bmatrix} \quad (33)$$

ただし ,

$$C = [C_1, C_2, \dots, C_p]^T \quad (34)$$

の $p \times s$ 行列である . さらに ,

$$M^* = \begin{bmatrix} M + J_m & -J_c^T & 0 \\ \frac{\partial C}{\partial q^T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$b = \begin{bmatrix} K_m i - H - G - (D + D_m) \dot{q} \\ -\dot{q}^T \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial C}{\partial q^T} \right) \right] \dot{q} \\ v - Ri - K_m \dot{q} \end{bmatrix} \quad (36)$$

とおくと , 式 (33) は ,

$$M^* \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ f_n \\ i \end{bmatrix} = b \quad (37)$$

と表される . 式 (37) を未知である \ddot{q} , f_n , i の式にすると ,

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ f_n \\ i \end{bmatrix} = M^{*-1} b \quad (38)$$

となり , 未知である \ddot{q} , f_n , i を同時に求めることができる . ただし , 上式が成り立つためには M^* が正則行列でなければならない . 次節により M^* の正則性を確認する .

3. M^* の正則性と逆行列算出法

3.1 M^* の正則性

M^* が正則行列であることを確認する .

まず , $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ の行列を考える . 一般に全体の行列が正則でかつ部分行列 A_{11} が正則であるとき , 全体のブロック行列の行列式は以下のようになる .

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \quad (39)$$

式 (39) を用いて , M^* について考える . M^* の左上の $(s+1) \times (s+1)$ のブロック行列 M_1 は ,

$$\begin{bmatrix} M_0 & -j_{c_1}^T \\ \frac{\partial C_1}{\partial q^T} & 0 \end{bmatrix} \triangleq M_1 \quad (40)$$

$$(M_0 = M + J_m)$$

と表され , 行列式を求めるとき , $M > 0$ と式 (8) の j_{ci}^T の定義より ,

$$\begin{aligned} \det M_1 &= \det M \cdot \det \left\{ \frac{\partial C_1}{\partial q^T} M^{-1} j_{c_1}^T \right\} \\ &= \frac{1}{\| \frac{\partial C_1}{\partial r^T} \|} \det M \cdot \det \left\{ \frac{\partial C_1}{\partial q^T} M^{-1} \left(\frac{\partial C_1}{\partial q^T} \right)^T \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

と表される . C_1 が独立な拘束条件であり , M^{-1} が正定な正則行列であることより , $\{(\partial C_1 / \partial q^T) M^{-1} (\partial C_1 / \partial q^T)^T\}$ は q に拘わらず常に正のスカラー値であるので , M_1 は正則であることが分かる .

同様に式 (32) より M_2 を定義する .

$$\begin{bmatrix} M_1 & -j_{c_2}^T \\ \frac{\partial C_2}{\partial q^T} & 0 \end{bmatrix} \triangleq M_2 \quad (42)$$

式 (42) の行列式を求めるとき , 先程と同様に , M_1 は正則行列であることと式 (8) の j_{ci}^T の定義より ,

$$\begin{aligned} \det M_2 &= \det M_1 \cdot \det \left\{ \frac{\partial C_2}{\partial q^T} M_1^{-1} j_{c_2}^T \right\} \\ &= \frac{1}{\| \frac{\partial C_2}{\partial r^T} \|} \det M_1 \cdot \det \left\{ \frac{\partial C_2}{\partial q^T} M_1^{-1} \left(\frac{\partial C_2}{\partial q^T} \right)^T \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

と表される。上記の議論と同様にして、 M_2 が正則であることがわかる。以上のことと繰り返すことによって、 M_1, M_2, \dots, M_{p-1} が正則な行列であることが分かる。よって、

$$\begin{bmatrix} M_{p-1} & -\mathbf{j}_{c_p}^T \\ \frac{\partial C_p}{\partial \mathbf{q}^T} & 0 \end{bmatrix} = M_p \quad (44)$$

も正則行列である。さらに $|M_p| \neq 0$, $|\mathbf{L}| \neq 0$ より、

$$\begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix} = M^* \quad (45)$$

も正則行列であり、式(45)が M^* と等しいことは、式(32)の左辺と式(35)の M^* を参考にすることで明らかである。以上より、 M^* は正則行列であることが確認できる。

3.2 M^{*-1} の算出方法

正則なブロック行列が $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ で与えられていくとき、その逆行列はその部分行列 A_{11} が正則であるとき以下のように求められる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} \\ \quad - (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} \\ - A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \\ \quad (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (46) \end{aligned}$$

式(46)より M^{*-1} は、

$$M^* = \begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_p^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^{-1} \end{bmatrix} \quad (47)$$

となり、 M_p^{-1} は、

$$\begin{aligned} M_p^{-1} &= \begin{bmatrix} M^{-1} - M^{-1} \mathbf{J}_c^T (\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} M^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} M^{-1} \\ \quad (\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} M^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} M^{-1} \\ - M^{-1} \mathbf{J}_c^T (\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} M^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \\ \quad (\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} M^{-1} \mathbf{J}_c^T)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M^{-1} \{ E - \mathbf{J}_c^T \widetilde{M}^{-1} \| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} M^{-1} \} \\ \widetilde{M}^{-1} \| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T} M^{-1} \\ \widetilde{M}^{-1} \| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \| M^{-1} \mathbf{J}_c^T \\ \widetilde{M}^{-1} \| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}^T} \| \end{bmatrix} \quad (48) \end{aligned}$$

と求めることができる。ただし、

$$(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T}) M^{-1} (\frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}^T})^T \triangleq \widetilde{M} \quad (49)$$

である。

4. 順動力学の解法

式(5)の運動方程式を陽に求めるることは困難である。特に本研究では肘をつくことによってハンドを遠くまで伸ばし、作業範囲を広げる冗長マニピュレータを想定しているため、式(14)や式(29)の運動方程式を求めることになる。

このような多リンクマニピュレータの運動方程式を解析的に求めることはとても難しく、不可能と考えてもよい。従って、ニュートン・オイラー法を利用して、解析的に求めることの難しい運動方程式(5)、式(14)、式(29)を数値的に簡単に解くことができる方法がすでに提案されている[3][4]。

まず、式(29)を次のように置く。

$$M_J \ddot{\mathbf{q}} + B_J = \tilde{\tau} \quad (50)$$

ただし、

$$\begin{aligned} M_J &= M(\mathbf{q}) + J_m \\ B_J &= H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) + (D + D_m) \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\tau} &= K_m i + J_c^T f_n - J_t^T f_t \end{aligned}$$

である。式(50)の運動方程式をニュートン・オイラー法により、正順計算を根元のリンクから各リンクごとにハンドまで行い、逆順計算を逆方向におこなうことにより、

$$\tilde{\tau}_i = {}^i z_i^T \mathbf{n}_i + J_{mi} \ddot{\mathbf{q}}_i + (D_i + D_{mi}) \dot{\mathbf{q}}_i \quad (51)$$

と求めることができる。式(50)の運動方程式は式(51)より $\tilde{\tau} = [\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \dots, \tilde{\tau}_n]^T$ と求めることができる。

次に $\ddot{\mathbf{q}}$ を求めるのに必要な $s \times s$ 行列 M_J と $s \times 1$ の縦ベクトル B_J を計算する。この計算に上で示したニュートン・オイラー法を利用する。まず $\tilde{\tau} = INV[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}]$ と置くと式(50)は、

$$M_J \ddot{\mathbf{q}} + B_J = INV[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}] \quad (52)$$

と置くことができる。式(52)に $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ を代入すると、

$$B_J = INV[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{0}, \mathbf{g}] \quad (53)$$

となり、 B_J が求まる。次に、式(52)に $\mathbf{g} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{q}} = e_i (i = 1, 2, \dots, s)$ を代入すると、

$$m_i = M_J e_i = INV[\mathbf{q}, \mathbf{0}, e_i, \mathbf{0}] \quad (54)$$

となる。 m_i は慣性行列 M の第 i 列の成分であり、 e_i は第 i 行目が 1 で、他は全て 0 の $l \times 1$ 行列であるので、式(54)より $M_J = [m_1, m_2, \dots, m_l]$ が求まる。

5. 結言

運動方程式の解析を行い、それをもとに行ったシミュレーションの結果を口頭にて発表する。

- [1] 池田毅、見浪護：“代数方程式に着目した力センサを用いないグラインディングロボットの研究”，日本機会学会論文集(C編), vol.71, no.702, pp.624-631, 2005
- [2] 神崎一男：“基礎メカトロニクス”，共立出版株式会社, pp.70-75, 1994.
- [3] 美多勉、大須賀公一：“ロボット制御工学入門”，コロナ社, pp.62-69, pp.73-76, 1989.
- [4] M.W.Walker and D.E.Orin：“Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, ASME J.of DSMC, 104, pp.468-474, 1982