

# ロボットの肘つきの高精度省エネルギー効果

High Accuracy/Low Energy Consumption Effect of Constraint Utilization of Robot

見浪 譲(福井大) ○ 山本 賢(福井大)

Mamoru MINAMI, University of Fukui, 3-9-1, Bunkyo, Fukui, 910-8507  
Masaru YAMAMOTO, University of Fukui, 3-9-1, Bunkyo, Fukui, 910-8507

In this paper, it proposes a dynamical robot model with multi-point elbow(Its modeling is realized through the integration of constrained multi-point state and motion equation). The simulation result shows that energy consumption when elbow is attached less than elbow is not attached.

*Keywords* : Redundant Manipulator, Constrained Motion with Elbow, Dynamical Model

## 1 緒言

多関節マニピュレータはリンクの数が増えるほど自重が増してしまい、制御する為にはより大きな力が必要となる。また、自重によって手先が下がってしまい、手先の精度も悪くなる。そこで、人間が肘をつくことによって少ない力で正確に作業を行えることを考え、同様に多関節マニピュレータにも同じことが言えるであろうと考える。本研究では、多点肘つきロボットの動力学モデル(多点拘束状態と運動方程式の統合によりモデル化を実現)を提案し、このモデルを使用して、肘をついたほうが肘をつかない時より少ない消費エネルギーで正確に作業が行えることをシミュレーションにより示す。

## 2 拘束運動

### 2.1 ハンド拘束運動

ここでは次節で述べる肘つき拘束運動の説明の準備のため、剛体リンクからなる  $s$  リンクマニピュレータの位置/力制御について考え、拘束面に接触しつつリンク先端のハンドで接触作業を行うロボットについて考える。ただし、ここでは接点での摩擦力は無視できるものとする。 $L$  をラグラジアン、 $q \in R^s$  を一般化座標、 $\tau \in R^s$  を一般化入力、また  $u$  をラグランジュの未定定数、 $f_t$  を摩擦力とするハンド拘束状態のラグランジュの方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = \tau + \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right)^T u - \left( \frac{\partial r}{\partial q^T} \right)^T \frac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|} f_t \quad (1)$$

と表される。ここで、手先の位置・姿勢ベクトル  $r \in R^s$  と超曲面を表すスカラー関数の拘束条件  $C$  は、順運動学関係式により、

$$r = r(q) \quad (2)$$

$$C(r(q)) = 0 \quad (3)$$

と表される。ここで拘束されるハンドは作業座標系の中で非拘束方向に運動できる自由度が残されていることから  $s > 1$  である。ハンドに作用する拘束力  $f_n$  で表すとき、 $u$  と  $f_n$  の関係は、

$$u = f_n / \left\| \frac{\partial C}{\partial r^T} \right\| \quad (4)$$

となる。ここで  $\|\cdot\|$  はベクトルのユークリッドノルムを表す。拘束力  $f_n$  が作用するマニピュレータの運動方

程式は、式 (1) と式 (4)、そして関節の粘性摩擦により、

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + g(q) + D\dot{q} \\ = \tau + \left\{ \left( \frac{\partial C}{\partial q^T} \right)^T / \left\| \frac{\partial C}{\partial r^T} \right\| \right\} f_n - \left( \frac{\partial r}{\partial q^T} \right)^T \frac{\dot{r}}{\|\dot{r}\|} f_t \end{aligned} \quad (5)$$

が導かれる [1]。 $M$  は  $s \times s$  の慣性行列、 $H$  と  $G$  はコリオリ力・遠心力と重力の影響を表す  $s \times 1$  の縦ベクトル、 $D$  は関節の粘性摩擦係数を表す  $s \times s$  の対角行列  $D = \text{diag}[D_1, D_2, \dots, D_s]$  である。また、本研究では一般化座標  $q$  は関節角度、一般化入力  $\tau$  は入力トルクを表す。

### 2.2 肘つき拘束運動

$s$  リンクマニピュレータの中間リンクが  $p$  個の拘束

$$C_i(r_i(q)) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (6)$$

を受けているときの運動方程式について考える。ここで  $r_i$  は拘束を受けている第  $i$  リンクの位置/姿勢を表す運動学方程式であり、式 (2) と同様、

$$r_i = r_i(q) \quad (7)$$

である。

式 (5) は、ハンド拘束運動を表している。拘束条件が複数存在する場合には、式 (5) の右辺第 2 項の拘束力の係数ベクトルと右辺第 3 項の摩擦力の係数ベクトルはそれぞれ、

$$\left( \frac{\partial C_i}{\partial q^T} \right)^T / \left\| \frac{\partial C_i}{\partial r^T} \right\| = j_{c_i}^T \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial r_i}{\partial q^T} \right)^T \frac{\dot{r}_i}{\|\dot{r}_i\|} = j_{t_i}^T \quad (9)$$

の  $s \times 1$  の縦ベクトルとなる。さらに、

$$J_c^T = [j_{c_1}^T, j_{c_2}^T, \dots, j_{c_p}^T] \quad (10)$$

$$J_t^T = [j_{t_1}^T, j_{t_2}^T, \dots, j_{t_p}^T] \quad (11)$$

$$f_n = [f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{np}]^T \quad (12)$$

$$f_t = [f_{t1}, f_{t2}, \dots, f_{tp}]^T \quad (13)$$

と定義する。 $J_c^T, J_t^T$  は  $s \times p$  行列であり、 $f_n, f_t$  は  $p \times 1$  の縦ベクトルである。これらを考慮すると、 $p$  個の点で

中間リンクが拘束されているマニピュレータの運動方程式は、

$$\begin{aligned} & M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} \\ &= \tau + \sum_{i=1}^p (\mathbf{j}_{ci}^T \mathbf{f}_{ni}) - \sum_{i=1}^p (\mathbf{j}_{ti}^T \mathbf{f}_{ti}) \\ &= \tau + \mathbf{J}_c^T \mathbf{f}_n - \mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t \end{aligned} \quad (14)$$

となる。また、式(6)を時間  $t$  で 2 回微分し、 $\ddot{\mathbf{q}}$  の拘束条件を求めるとき、

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \dot{\mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} + \left( \frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \ddot{\mathbf{q}} = 0 \quad (15)$$

が得られる。マニピュレータが常に拘束面に拘束されるためには、式(14)の解  $\mathbf{q}(t)$  が時間  $t$  に無関係に式(6)を満たさなければならない。式(6)の時間微分によって得られた式(15)を満たす  $\ddot{\mathbf{q}}$  と式(14)の  $\ddot{\mathbf{q}}$  が同じ値をとるとき、式(14)の  $\mathbf{q}(t)$  は式(6)を満たすことになる。

### 2.3 モータを含めたロボットダイナミクス

本研究では、マニピュレータの関節を動かすのに使用するモータを直流サーボモータの等価な電子回路とする。ここで、モータの端子電圧  $v_i$ 、抵抗  $R_i$ 、インダクタンス  $L_i$ 、回路を流れる電流  $i_i$ 、モータの角変位  $\theta_i$ 、発生トルク  $\tau_{gi}$ 、負荷トルク  $\tau_{Li}$ 、逆起電力  $v_{gi}$ 、モータの慣性モーメント  $I_{mi}$ 、逆起電力定数  $K_{Ei}$ 、トルク定数  $K_{Ti}$ 、減速機の粘性摩擦係数  $d_{mi}$  とする。このときモータについて次の関係式が成り立つ [2]。

$$\text{電圧方程式} : v_i(t) = L_i \dot{i}_i + R_i i_i(t) + v_{gi}(t) \quad (16)$$

$$\text{逆起電力} : v_{gi}(t) = K_{Ei} \dot{\theta}_i(t) \quad (17)$$

$$\text{運動方程式} : I_{mi} \ddot{\theta}_i = \tau_{gi}(t) - \tau_{Li}(t) - d_{mi} \dot{\theta}_i \quad (18)$$

$$\text{発生トルク} : \tau_g(t) = K_{Ti} i_i(t) \quad (19)$$

ただし、磁界と各定数との関係から直流モータでは、 $K_{Ti} = K_{Ei} (= K)$  であることが知られている。

ここで、式(17)を式(16)に、式(19)を式(18)にそれぞれ代入すると、

$$v_i = L_i \dot{i}_i + R_i i_i + K_i \dot{\theta}_i \quad (20)$$

$$I_{mi} \ddot{\theta}_i = K_i i_i - \tau_{Li} - d_{mi} \dot{\theta}_i \quad (21)$$

となる。また、モータを減速比が  $k_i$  の歯車列を介してマニピュレータに取り付けた場合、

$$\theta_i = k_i q_i \quad (22)$$

$$\tau_{Li} = \frac{\tau_i}{k_i} \quad (23)$$

となり、式(20)、式(21)を  $i_i$  と  $\tau_i$  の式にすると、

$$L_i \dot{i}_i = v_i - R_i i_i - K_i k_i \dot{q}_i \quad (24)$$

$$\tau_i = -I_{mi} k_i^2 \ddot{q}_i + K_i k_i i_i - d_{mi} k_i^2 \dot{q}_i \quad (25)$$

となる。式(24)、式(25)をベクトル、行列で表記する場合、

$$L \dot{\mathbf{i}} = \mathbf{v} - \mathbf{R} \mathbf{i} - \mathbf{K}_m \dot{\mathbf{q}} \quad (26)$$

$$\tau = -\mathbf{J}_m \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_m \mathbf{i} - \mathbf{D}_m \dot{\mathbf{q}} \quad (27)$$

と置く。ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [v_1, v_2, \dots, v_s]^T \\ \mathbf{i} &= [i_1, i_2, \dots, i_s]^T \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \text{diag}[L_1, L_2, \dots, L_s] \\ \mathbf{R} &= \text{diag}[R_1, R_2, \dots, R_s] \\ \mathbf{K}_m &= \text{diag}[K_{m1}, K_{m2}, \dots, K_{ms}] \\ \mathbf{J}_m &= \text{diag}[J_{m1}, J_{m2}, \dots, J_{ms}] \\ \mathbf{D}_m &= \text{diag}[D_{m1}, D_{m2}, \dots, D_{ms}] \\ K_{mi} &= K_i k_i, \quad J_{mi} = I_{mi} k_i^2, \quad D_{mi} = d_{mi} k_i^2 \end{aligned}$$

と定義し、すべて正の要素を持つ。

式(27)を式(14)に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_m) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_m) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{K}_m \mathbf{i} + \mathbf{J}_c^T \mathbf{f}_n - \mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t \end{aligned} \quad (28)$$

となる。(14)と式(15)の関係と同様に、式(15)を満たす  $\ddot{\mathbf{q}}$  と式(28)の  $\ddot{\mathbf{q}}$  が同じ値をとるとき、式(28)の  $\mathbf{q}(t)$  は式(6)を満たすことになる。

### 2.4 複数拘束条件付、ロボット/モータの連立方程式

式(28)と式(15)の  $\ddot{\mathbf{q}}$  が同じ値をとるため、拘束力  $\mathbf{f}_n$  は従属的に決定される。この関係を陽に表すため、式(28)、式(15)を、

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M} + \mathbf{J}_m) \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_c^T \mathbf{f}_n \\ &= \mathbf{K}_m \mathbf{i} - \mathbf{H} - \mathbf{g} - (\mathbf{D} + \mathbf{D}_m) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_t^T \mathbf{f}_t \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \ddot{\mathbf{q}} &= - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \dot{\mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\dot{\mathbf{q}}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial C_i}{\partial \mathbf{q}^T} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (30)$$

と変形する。式(30)の左辺の  $\partial C_i / \partial \mathbf{q}^T$  は  $1 \times s$  の横ベクトルであり、右辺の  $\dot{\mathbf{q}}^T \left[ (\partial / \partial \mathbf{q}) (\partial C_i / \partial \mathbf{q}^T) \right] \dot{\mathbf{q}}$  は  $1 \times 1$  のスカラーである。式(29)、式(30)、式(24)を合わせて以下の様な式に表す。ただし、摩擦力  $\mathbf{j}_{ti}^T \mathbf{f}_{ti} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ )

とする。

$$\begin{bmatrix}
 M + J_m & -j_{c_1}^T & \cdots & -j_{c_p}^T & 0 & \cdots & 0 \\
 \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}^T} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \frac{\partial C_p}{\partial \dot{q}^T} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & L_1 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & L_s
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \ddot{q} \\
 f_n \\
 i
 \end{bmatrix} = M^{*-1} b
 \quad (37)$$

$$= \begin{bmatrix}
 K_m i - H - g - (D + D_m) \dot{q} \\
 -\dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}^T} \right) \right] \dot{q} \\
 \vdots \\
 -\dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\partial C_p}{\partial \dot{q}^T} \right) \right] \dot{q} \\
 v_1 - R_1 i_1 - K_{m1} \dot{q}_1 \\
 \vdots \\
 v_i - R_s i_s - K_{ml} \dot{q}_s
 \end{bmatrix}
 \quad (31)$$

慣性項  $(M + J_m)$  が  $s \times s$  行列, 拘束力の係数ベクトル  $j_{c_i}^T$  が  $s \times 1$  の縦ベクトル,  $\partial C_i / \partial \dot{q}^T$  が  $1 \times s$  の横ベクトル, インダクタンス  $L$  が  $s \times s$  の対角行列であることより, 式 (31) の左辺第 1 項の行列は  $(2s + p) \times (2s + p)$  行列である。

式 (31) は式 (10), 式 (12), (26) の定義を用いると次のように表される。

$$\begin{bmatrix}
 M + J_m & -j_{c_1}^T & 0 \\
 \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^T} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & L
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \ddot{q} \\
 f_n \\
 i
 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
 K_m i - H - g - (D + D_m) \dot{q} \\
 -\dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^T} \right) \right] \dot{q} \\
 v - R i - K_m \dot{q}
 \end{bmatrix}
 \quad (32)$$

ただし,

$$C = [C_1, C_2, \dots, C_p]^T
 \quad (33)$$

の  $p \times s$  行列である。さらに,

$$M^* = \begin{bmatrix}
 M + J_m & -j_{c_1}^T & 0 \\
 \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^T} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & L
 \end{bmatrix}
 \quad (34)$$

$$b = \begin{bmatrix}
 K_m i - H - G - (D + D_m) \dot{q} \\
 -\dot{q}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^T} \right) \right] \dot{q} \\
 v - R i - K_m \dot{q}
 \end{bmatrix}
 \quad (35)$$

とおくと, 式 (32) は,

$$M^* \begin{bmatrix}
 \ddot{q} \\
 f_n \\
 i
 \end{bmatrix} = b
 \quad (36)$$

と表される。式 (36) を未知である  $\ddot{q}, f_n, i$  の式にすると,

となり, 未知である  $\ddot{q}, f_n, i$  を同時に求めることができる。ただし, 上式が成り立つためには  $M^*$  が正則行列でなければならない。次節により  $M^*$  の正則性を確認する。

### 3 $M^*$ の正則性と逆行列算出法

#### 3.1 $M^*$ の正則性

$M^*$  が正則行列であることを確認する。

まず,  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$  の行列を考える。一般に全体の行列が正則でかつ部分行列  $A_{11}$  が正則であるとき, 全体のブロック行列の行列式は以下のようになる。

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det A_{11} \cdot \det (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})
 \quad (38)$$

式 (38) を用いて,  $M^*$  について考える。 $M^*$  の左上の  $(s+1) \times (s+1)$  のブロック行列  $M_1$  は,

$$\begin{bmatrix}
 M_0 & -j_{c_1}^T \\
 \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}^T} & 0
 \end{bmatrix} \triangleq M_1
 \quad (39)$$

$(M_0 = M + J_m)$

と表され, 行列式を求めるとき,  $M > 0$  と式 (8) の  $j_{c_i}^T$  の定義より,

$$\begin{aligned}
 \det M_1 &= \det M \cdot \det \left\{ \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}^T} M^{-1} j_{c_1}^T \right\} \\
 &= \frac{1}{\| \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}^T} \|} \det M \cdot \det \left\{ \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}^T} M^{-1} \left( \frac{\partial C_1}{\partial \dot{q}^T} \right)^T \right\}
 \end{aligned}
 \quad (40)$$

と表される。 $C_1$  が独立な拘束条件であり,  $M^{-1}$  が正定な正則行列であることより,  $\{(\partial C_1 / \partial \dot{q}^T) M^{-1} (\partial C_1 / \partial \dot{q}^T)^T\}$  は  $q$  に拘わらず常に正のスカラー値であるので,  $M_1$  は正則であることが分かる。

同様に式 (31) より  $M_2$  を定義する。

$$\begin{bmatrix}
 M_1 & -j_{c_2}^T \\
 \frac{\partial C_2}{\partial \dot{q}^T} & 0
 \end{bmatrix} \triangleq M_2
 \quad (41)$$

式 (41) の行列式を求めるとき, 先程と同様に,  $M_1$  は正則行列であることと式 (8) の  $j_{c_i}^T$  の定義より,

$$\begin{aligned}
 \det M_2 &= \det M_1 \cdot \det \left\{ \frac{\partial C_2}{\partial \dot{q}^T} M_1^{-1} j_{c_2}^T \right\} \\
 &= \frac{1}{\| \frac{\partial C_2}{\partial \dot{q}^T} \|} \det M_1 \cdot \det \left\{ \frac{\partial C_2}{\partial \dot{q}^T} M_1^{-1} \left( \frac{\partial C_2}{\partial \dot{q}^T} \right)^T \right\}
 \end{aligned}
 \quad (42)$$

と表される。上記の議論と同様にして,  $M_2$  が正則であることがわかる。以上のことを繰り返すことによって,

$M_1, M_2, \dots, M_{p-1}$  が正則な行列であることが分かる。よって、

$$\begin{bmatrix} M_{p-1} & -j_{C_p}^T \\ \frac{\partial C_p}{\partial q^T} & 0 \end{bmatrix} = M_p \quad (43)$$

も正則行列である。さらに  $|M_p| \neq 0$ ,  $|L| \neq 0$  より、

$$\begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} = M^* \quad (44)$$

も正則行列であり、式 (44) が  $M^*$  と等しいことは、式 (31) の左辺と式 (34) の  $M^*$  を参考にすることで明らかである。以上より、 $M^*$  は正則行列であることが確認できる。

### 3.2 $M^{*-1}$ の算出方法

正則なブロック行列が  $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$  で与えられているとき、その逆行列はその部分行列  $A_{11}$  が正則であるとき以下のように求められる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} \\ \quad - (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} \\ - A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \\ \quad (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (45) \end{aligned}$$

式 (45) より  $M^{*-1}$  は、

$$M^* = \begin{bmatrix} M_p & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M_p^{-1} & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

となり、 $M_p^{-1}$  は、

$$\begin{aligned} M_p^{-1} &= \begin{bmatrix} M^{-1} - M^{-1} J_c^T (\frac{\partial C}{\partial q^T} M^{-1} J_c^T)^{-1} \frac{\partial C}{\partial q^T} M^{-1} \\ (\frac{\partial C}{\partial q^T} M^{-1} J_c^T)^{-1} \frac{\partial C}{\partial q^T} M^{-1} \\ - M^{-1} J_c^T (\frac{\partial C}{\partial q^T} M^{-1} J_c^T)^{-1} \\ (\frac{\partial C}{\partial q^T} M^{-1} J_c^T)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M^{-1} \{E - J_c^T \tilde{M}^{-1} \|\frac{\partial C}{\partial r^T}\| \frac{\partial C}{\partial q^T} M^{-1}\} \\ \tilde{M}^{-1} \|\frac{\partial C}{\partial r^T}\| \frac{\partial C}{\partial q^T} M^{-1} \} \\ \tilde{M}^{-1} \|\frac{\partial C}{\partial r^T}\| M^{-1} J_c^T \\ \tilde{M}^{-1} \|\frac{\partial C}{\partial r^T}\| \end{bmatrix} \quad (47) \end{aligned}$$

と求めることができる。ただし、

$$(\frac{\partial C}{\partial q^T}) M^{-1} (\frac{\partial C}{\partial q^T})^T \triangleq \tilde{M} \quad (48)$$

である。

## 4 順動力学の解法

式 (5) の運動方程式を陽に求めるることは困難である。特に本研究では肘をつくことによってハンドを遠くまで伸ばし、作業範囲を広げる冗長マニピュレータを想定しているため、式 (14) や式 (28) の運動方程式を求めることがある。

このような多リンクマニピュレータの運動方程式を解析的に求めることはとても難しく、不可能と考えてもよい。従って、ニュートン・オイラー法を利用して、解析的に求めることの難しい運動方程式 (5), 式 (14), 式 (28) を数値的に簡単に解くことができる方法がすでに提案されている [3][4]。

まず、式 (28) を次のように置く。

$$M_J \ddot{q} + B_J = \tilde{\tau} \quad (49)$$

ただし、

$$\begin{aligned} M_J &= M(q) + J_m \\ b_J &= H(q, \dot{q}) + g(q) + (D + D_m) \dot{q} \\ \tilde{\tau} &= K_m i + J_c^T f_n - J_t^T f_t \end{aligned}$$

である。式 (49) の運動方程式をニュートン・オイラー法により、正順計算を根元のリンクから各リンクごとにハンドまで行い、逆順計算を逆方向におこなうことにより、

$$\tilde{\tau}_i = {}^i z_i^T n_i + J_{mi} \ddot{q}_i + (D_i + D_{mi}) \dot{q}_i \quad (50)$$

と求めることができる。式 (49) の運動方程式は式 (50) より  $\tilde{\tau} = [\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \dots, \tilde{\tau}_n]^T$  と求めることができる。

次に  $\dot{q}$  を求めるのに必要な  $s \times s$  行列  $M_J$  と  $s \times 1$  の縦ベクトル  $b_J$  を計算する。この計算に上で示したニュートン・オイラー法を利用する。まず  $\tilde{\tau} = \text{INV}[q, \dot{q}, \ddot{q}, g]$  と置くと式 (49) は、

$$M_J \ddot{q} + b_J = \text{INV}[q, \dot{q}, \ddot{q}, g] \quad (51)$$

と置くことができる。式 (51) に  $\ddot{q} = 0$  を代入すると、

$$b_J = \text{INV}[q, \dot{q}, 0, g] \quad (52)$$

となり、 $b_J$  が求まる。次に、式 (51) に  $g = 0, \dot{q} = 0, \ddot{q} = e_i (i = 1, 2, \dots, s)$  を代入すると、

$$m_i = M_J e_i = \text{INV}[q, 0, e_i, 0] \quad (53)$$

となる。 $m_i$  は慣性行列  $M$  の第  $i$  列の成分であり、 $e_i$  は第  $i$  行目が 1 で、他は全て 0 の  $l \times 1$  行列であるので、式 (53) より  $M_J = [m_1, m_2, \dots, m_l]$  が求まる。

## 5 軌道追従のシミュレーション

以上の内容を用いて円軌道追従のシミュレーションを行い、肘をついた場合とつかない場合とを比較する。また、コントローラーは以下のようない PD 制御の電圧入力とする。

$$v = K_p(q_d - q) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) \quad (54)$$

$K_p$  は比例ゲインを表す  $s \times s$  の対角行列、 $K_d$  は速度ゲインを表す  $s \times s$  の対角行列であり、 $q_d, \dot{q}_d$  はそれぞれ目標の関節角度、関節角速度である。

シミュレーションの設定条件として、10 リンク目のみ  $z$  軸回転を行い、他の 2 ~ 10 リンク目は  $y$  軸回転を行う。質量  $m_i = 0.1 [kg]$ 、

リンク長  $l_1 = 0[m]$ ,  $l_j = 0.3[m]$ , 円柱リンクの半径  $r_i = 0.01[m]$ , 比例ゲイン  $K_{pi} = 500$ , 速度ゲイン  $K_{di} = 20$ , 関節の粘性摩擦係数  $D_i = 0.5$ , 逆起電力定数, トルク定数  $K_i = 0.203$ , 抵抗  $R_i = 1.1[\Omega]$  インダクタンス  $L_i = 0.0017[H]$ , モータの慣性モーメント  $I_{mi} = 0.000164$ , 減速比  $k_i = 3.0$ , 減速機の粘性摩擦係数  $d_{mi} = 0.01$ , 摩擦力  $f_{ti} = 0$  とし, 各関節の初期状態を,  $q_1(0) = 0, q_2(0) = 0.25\pi, q_3(0) = 0.5\pi, q_4(0) = -0.5\pi, q_5(0) = 0.25\pi, q_6(0) = 0.25\pi, q_7(0) = -0.5\pi, q_8(0) = 0.25\pi, q_9(0) = -0.25\pi, q_{10}(0) = 0.25\pi [rad], \dot{q}_i = 0 [rad/s]$  とする. 初期状態のマニピュレータの簡易図を Fig.1 に示す. また, 目標軌道には  $q_{d2}(t) = 0.25\pi, q_{d3}(t) = 0.5\pi, q_{d4}(0) = -0.5\pi, q_{d5}(0) = 0.25\pi, q_{d6}(0) = 0.25\pi, q_{d7}(0) = -0.5\pi, q_{d8}(0) = 0.25\pi [rad]$  を固定とし, 座標  $(x, y, z) = (1.5, 1.5, 0.4)$  を中心とした半径  $0.1[m]$  の円を手先が反時計回りに回転する円軌道を与える. また, シミュレーションは, 第4関節と第7関節が拘束されている2点肘つきの運動, 第4関節のみが拘束されている1点肘つきの運動, 肘をつかない運動の3通りを行う. 拘束条件は,  $C(r_3) = 0, C(r_6) = 0$  であり, 具体的には  $z_3 = z_6 = 0$  である. この3通りの円軌道追従のシミュレーションの結果を Fig.2 ~ Fig.12 に示す.

Fig.2, Fig.3, Fig.4 はそれぞれ  $xy$  座標平面上の2点肘つき, 1点肘つき, 肘なしの手先の軌道であり, 同様に Fig.5, Fig.6, Fig.7 は  $xz$  座標平面上の2点肘つき, 1点肘つき, 肘なしの手先の軌道, Fig.9, Fig.10, Fig.11 は  $yz$  座標平面上の2点肘つき, 1点肘つき, 肘なしの手先の軌道であり, これらは時間  $t = 0 \sim 5[s]$  間の軌道である. また, Fig.8 は時間  $t$  までにマニピュレータの全リンクがした仕事の合計であり, Fig.12 は時間  $t$  までに全モータが消費した電力量の合計である. また, Fig.8, Fig.12 を各リンク毎の仕事, 電力量に分けたグラフを Fig.13 ~ Fig.32 に示す.

## 6 結言

Fig.2 ~ Fig.12 より, 多く肘をついた方がつかないよりも正確に円軌道を追従できていることが分かる. 特に, 重力の働く  $z$  軸方向には, 肘をつかない運動は肘が下がってしまう影響で手先も下がってしまい, うまく手先追従ができていない. また, Fig.8, Fig.12 より, たとえマニピュレータのする仕事が同じでも, 消費電力量で肘をつかない運動の方が大きくなってしまう. これは Fig.13 ~ Fig.32 より, 肘をつく前のリンクになるほど消費電力量の差は大きくなる. 以上より, 肘をついた運動のほうが, 肘をつかない運動よりも少ない力, 少ない消費エネルギーで正確に作業が行えることが分かる.

## 参考文献

- [1] 池田毅, 見浪護: “代数方程式に着目した力センサを用いないグラインディングロボットの研究”, 日本機械学会論文集 (C 編), vol.71, no.702, pp.624-631, 2005
- [2] 神崎一男: “基礎メカトロニクス”, 共立出版株式会社, pp.70-75, 1994.
- [3] 美多勉, 大須賀公一: “ロボット制御工学入門”, コロナ社, pp.62-69, pp.73-76, 1989.
- [4] M.W.Walker and D.E.orin: “Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, ASME J.of DSCMC,104, pp.468-474, 1982

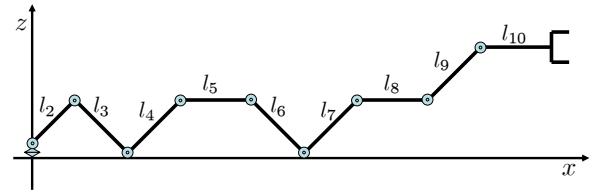


Fig. 1: Initial configuration of manipulator

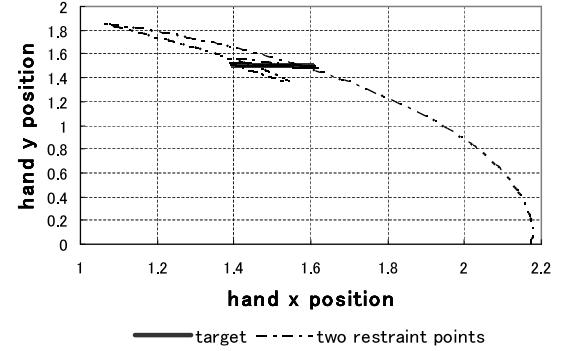


Fig. 2: Hand trajectory on x-y plane (with two-points contacting)

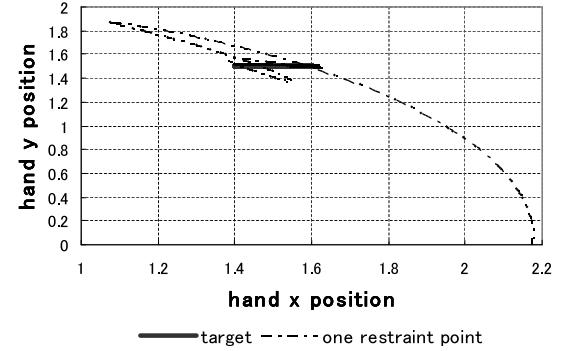


Fig. 3: Hand trajectory on x-y plane (with one-point contacting)

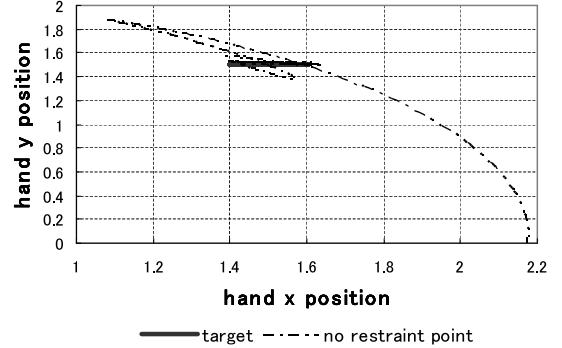


Fig. 4: Hand trajectory on x-y plane (with no-point contacting)

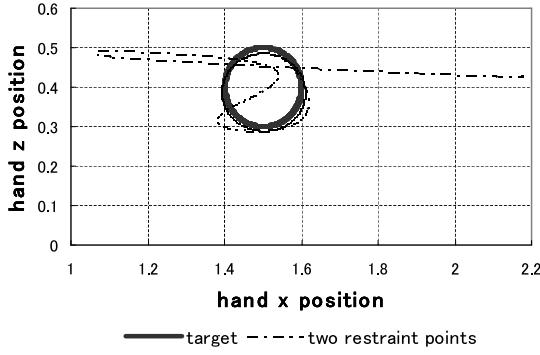


Fig. 5: Hand trajectory on x-z plane (with two-points contacting)

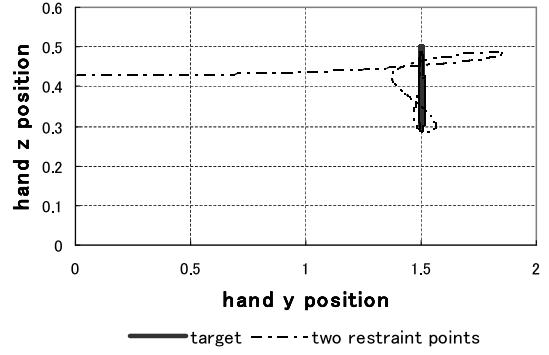


Fig. 9: Hand trajectory on y-z plane (two-points contacting)

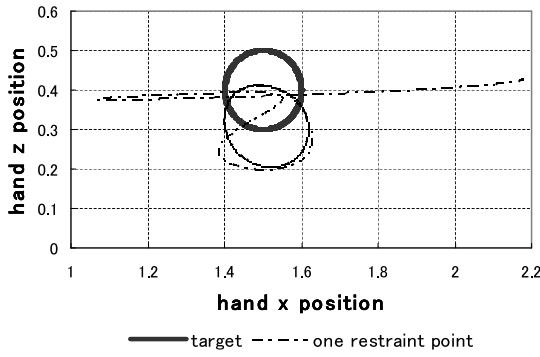


Fig. 6: Hand trajectory on x-z plane (with one-point contacting)



Fig. 10: Hand trajectory on y-z plane (one-point contacting)

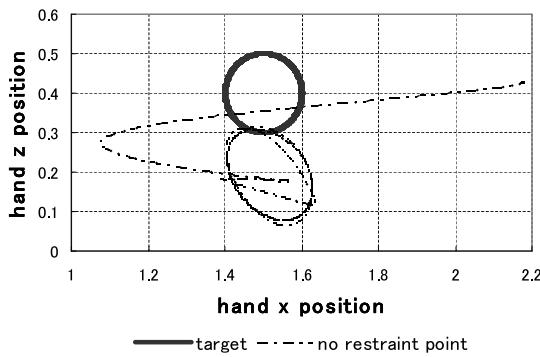


Fig. 7: Hand trajectory on x-z plane (with no-point contacting)

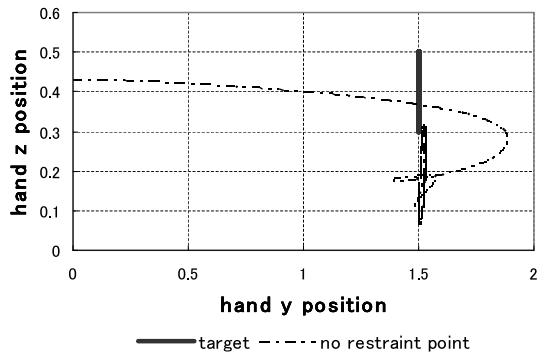


Fig. 11: Hand trajectory on y-z plane (no-point contacting)

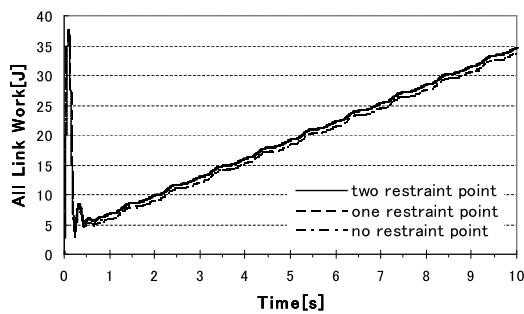


Fig. 8: Work summation of all links

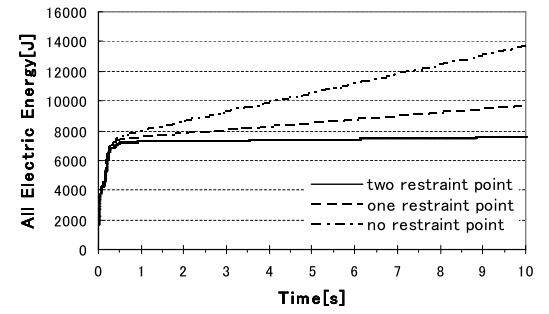


Fig. 12: Electric energy summation of all links

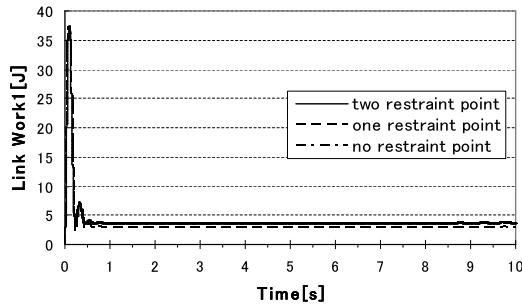


Fig. 13: Link work of the 1-st link

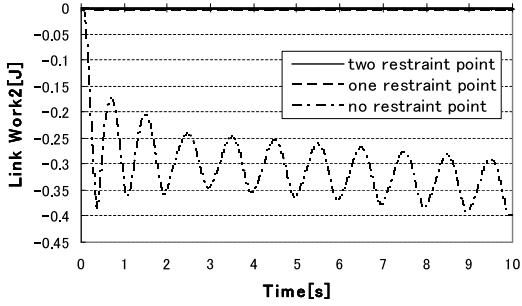


Fig. 14: Link work of the 2-nd link

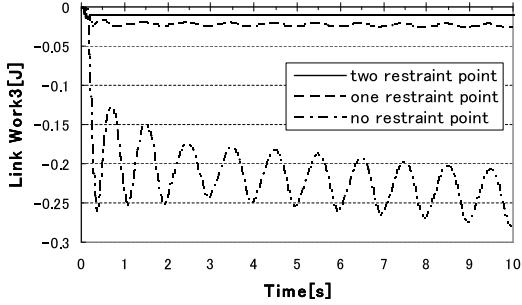


Fig. 15: Link work of the 3-rd link

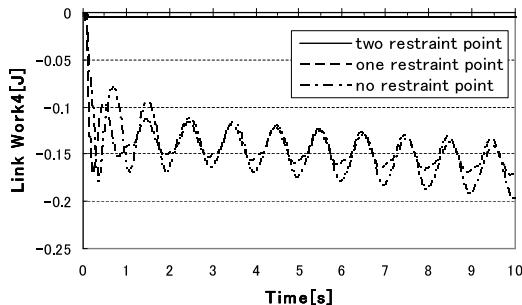


Fig. 16: Link work of the 4-th link

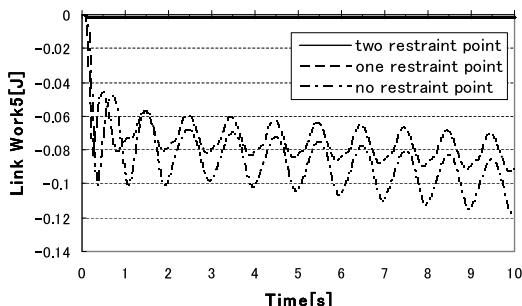


Fig. 17: Link work of the 5-th link

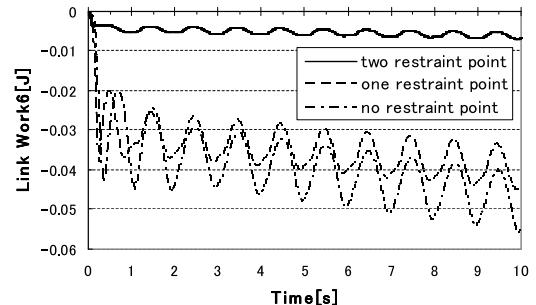


Fig. 18: Link work of the 6-th link

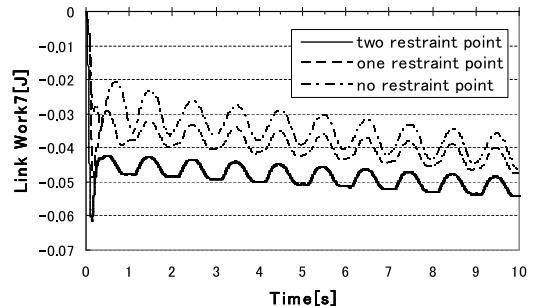


Fig. 19: Link work of the 7-th link

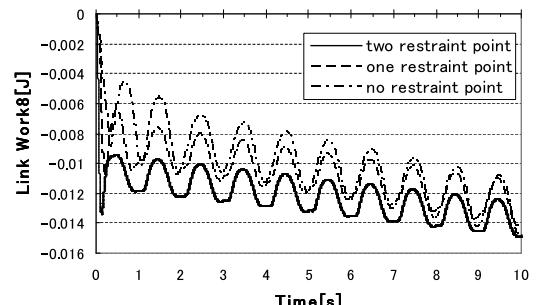


Fig. 20: Link work of the 8-th link



Fig. 21: Link work of the 9-th link

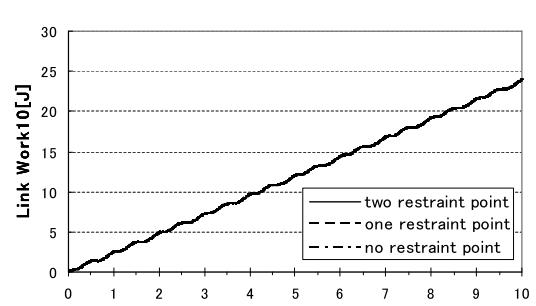


Fig. 22: Link work of the 10-th link

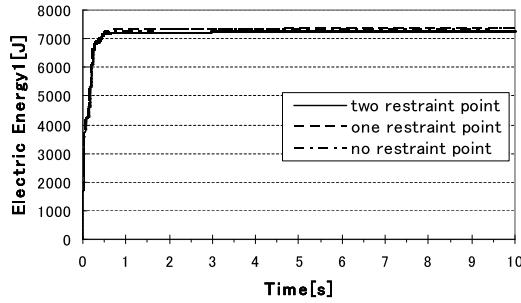


Fig. 23: Electric energy of the 1-st link

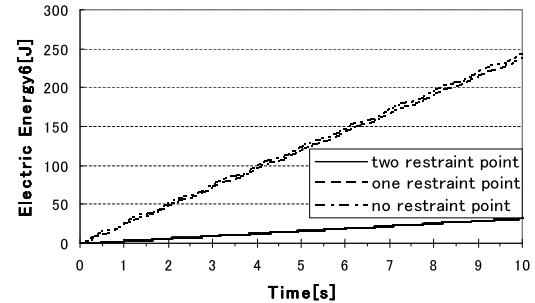


Fig. 28: Electric energy of the 6-th link

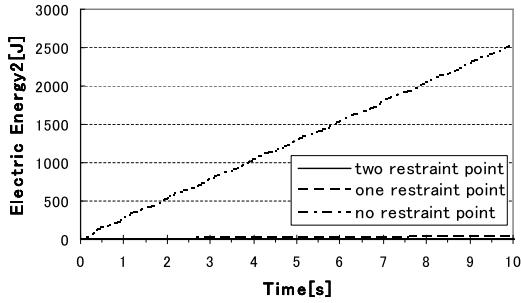


Fig. 24: Electric energy of the 2-nd link

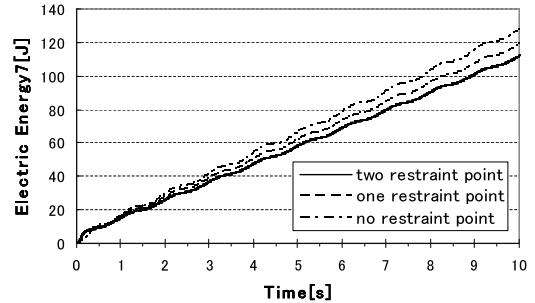


Fig. 29: Electric energy of the 7-th link

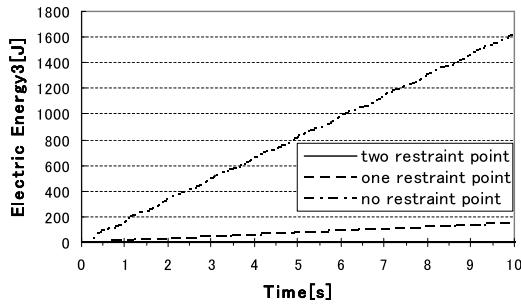


Fig. 25: Electric energy of the 3-rd link

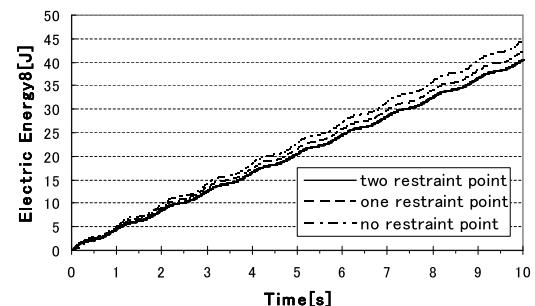


Fig. 30: Electric energy of the 8-th link

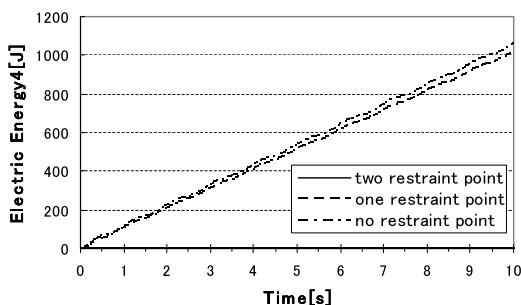


Fig. 26: Electric energy of the 4-th link

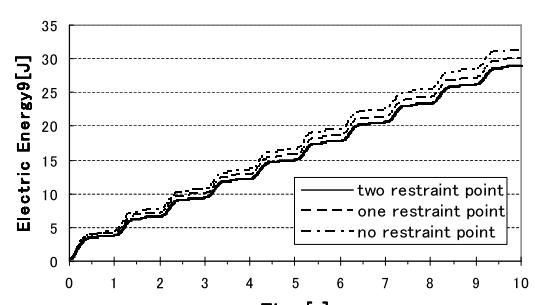


Fig. 31: Electric energy of the 9-th link

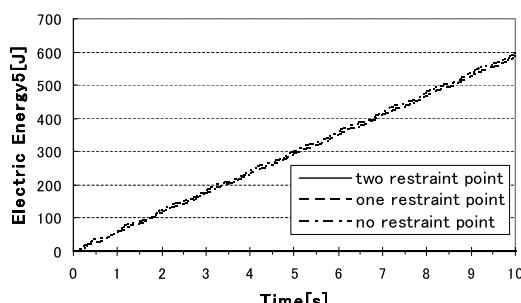


Fig. 27: Electric energy of the 5-th link

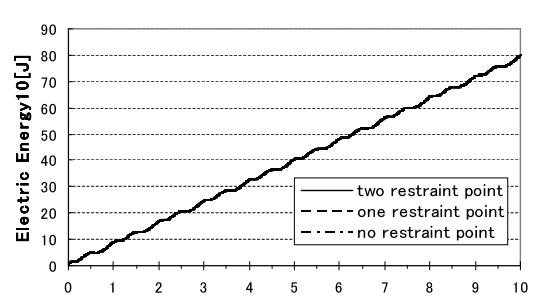


Fig. 32: Electric energy of the 10-th link